

## ДИАГНОСТИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ \*



### **АХТЯМОВ**

#### **Азамат Мухтарович.**

*доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой  
Башкирского государственного  
университета*

Порой некоторые специалисты, не производя разборку двигателя, по тончайшим особенностям шумов в двигателе могут определить, где находится неисправность. Является ли это случайным угадыванием или же специалисты действительно «слышат» неисправность и такому распознаванию может научиться и обычный человек после соответствующей тренировки?

Этот, казалось бы, несерьезный вопрос связан с фундаментальными проблемами математики и механики, а ответ на него важен для создания приборов технической диагностики, а также менее шумных и безопасных для здоровья человека двигателей.

Поставленный вопрос порождает множество других, более конкретных. Например, можно ли по собственным частотам колебаний стержня определить, как закреплены концы стержня? Закреплены они на пружинках,

заделаны или свободны? И если они закреплены на пружинках, то каковы коэффициенты жесткостей пружинок? Можно ли по собственным частотам колебаний определить, как закреплены такие механические системы, как пластина, мембрана или оболочка? Какие виды и параметры закрепления нужны для того, чтобы частоты колебаний механической системы находились в нужном, безопасном для здоровья человека диапазоне?

Именно эти вопросы о возможностях диагностирования закреплений по звучанию легли в основу исследований в рамках грантов, выполненных под руководством автора настоящей статьи. Это – гранты АН РБ «Методы неразрушающего контроля механических систем» (2005), «Приложение качественной и спектральной теории дифференциальных операторов к задачам механики и математической физики» (2006), а также грант РФФИ и АН РБ «Обратные спектральные задачи и акустическая диагностика» (2008). В результате исследований были получены ответы на сформулированные выше и многие другие важные теоретические вопросы, была показана корректность поставленных задач, доказаны теоремы единственности их решений, разработаны новые методы решения задач математической физики, найдены их применения в технике.

Для того чтобы лучше понять суть этих исследований, напомним известные представления о звуке, собственных частотах, тонах, обертонах и т.п. Звук передается с помощью звуковых волн. Если оттянуть струну гитары, а потом отпустить ее, то она начнет вибрировать, т.е. колебаться около своего первоначального положения равновесия. Пока струна

---

\* Исследования выполнены при финансовой поддержке АН РБ и РФФИ (грант № 08-01-97026-р\_поволжье\_a).

колеблется, мы слышим звук. Как только струна успокоится, звук затихает. Рождение звука – результат сгущения и разрежения молекул воздуха. Колебаясь из стороны в сторону, струна теснит, как бы прессует молекулы воздуха, образуя перед собой в некотором его объеме область повышенного, а сзади, наоборот, – пониженного давления. Это и есть звуковые волны. Чем больше амплитуда звуковой волны, тем больше энергии она несет в себе, тем громче воспринимаемый нами звук; чем больше число звуковых колебаний в единицу времени, тем больше его частота. Крылья пчел совершают 200 колебаний в секунду, поэтому звук, который мы слышим, имеет частоту 200 герц. Звук комариного роя является более высоким, т. к. комары машут крыльями еще быстрее, совершая до 500 колебаний в секунду. Таким образом, благодаря числовой характеристике, герцам, мы можем распознать (диагностировать) насекомое – комар это или пчела.

Человеческое ухо способно реагировать на относительно небольшой диапазон частот звуковых колебаний – примерно от 16 Гц до 20 кГц. Колебаний частотой до 16 Гц, называемых *инфразвуковыми*, и свыше 20 кГц, называемых *ультразвуковыми* (20 кГц – 1 ГГц) и *гиперзвуковыми* (>1 ГГц), мы не слышим. Все частоты волн, из которых состоит звук, называются спектром частот.

Данные о звуках и шумах можно использовать для получения информации о состоянии механических систем. Наука, которая изучает такие возможности, называется *акустической диагностикой* [1].

Акустическая диагностика – это не только наука, о которой написано в специальных учебниках и монографиях, но и то, с чем мы сталкиваемся в обычной жизни. Продавцы стучат шариковой ручкой по поверхности сосуда, работники железнодорожных станций постукивают молоточком по колесам поезда. Их задача – акустическая диагностика трещин. В науке метод проверки трещин носит название *интегрального метода свободных колебаний*. Его используют очень давно при проверке стеклянной посуды, бандажей железнодорожных колес, ударных музыкальных инструментов и других объектов по «чистоте звона», вызываемого механическим ударом. Смещение собственной частоты – признак наличия дефектов.

Нами при изучении возможностей диагностирования закрепленных механических систем были применены методы, которые в чем-то сродни интегральному методу свободных колебаний. Они также позволяют по собственным частотам колебаний, вызываемых механическим ударом, диагностировать систему, а именно вид и параметры ее закрепления. Преимуществом наших методов диагностирования, как и интегрального метода свободных колебаний, является то, что они не зависят от силы механического удара (амплитуды колебаний). Отличие же состоит в том, что нами диагностируются иные объекты.

Вернемся к вопросам, поставленным в начале статьи, и отметим, что удалось выяснить. Один из вопросов был связан с закреплением концов стержня. Стержень может быть закреплен по-разному. На рисунке изображено общее закрепление левого конца стержня. Через  $c_1$  обозначена жесткость пружины, препятствующая вертикальному смещению, через  $c_2$  – препятствующая повороту стержня. В общем случае коэффициенты жесткости  $c_1$  и  $c_2$  могут изменяться в широких пределах. При различных  $c_1$  и  $c_2$  получаем различные виды закрепления. Например, в случае  $c_1=0$  и  $c_2=0$  (пружинок нет вообще) на конце стержня реализуется «свободный конец», в случае  $c_1=\infty$  и  $c_2=\infty$  – «заделка», в случае  $c_1=\infty$  и  $c_2=0$  – «свободное опирание», в случае  $c_1=0$  и  $c_2=\infty$  – «плавающая заделка», в случае  $c_1=c$  ( $0 < c < +\infty$ ) и  $c_2=0$  – «упругое опирание».

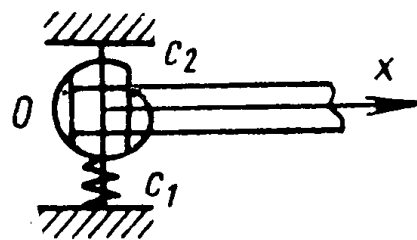


Рис. Закрепление левого конца стержня

В начале статьи был задан вопрос: можно ли по собственным частотам колебаний стержня определить, как закреплены концы стержня? В результате наших исследований ответ на этот вопрос был найден [2]. Оказалось, что если стержень является однородным, то вид и параметры закрепления его концов определяются однозначно с точностью до перестановок закреплений на концах стержня. Например, по собственным частотам можно опре-

делить, что левый конец стержня закреплен упруго с коэффициентами жесткостей пружинок  $c_1=1$  и  $c_2=2$ , а правый конец заделан, или же наоборот, левый конец заделан, а правый конец стержня закреплен упруго с коэффициентами жесткостей  $c_1=2$  и  $c_2=1$ .

Одинаковое звучание стержней, закрепленных таким образом, понятно. Ведь при перемене закреплений на концах однородного стержня звучание его колебаний не изменится. Это связано с тем, что концы однородного стержня равноправны, поэтому замена закреплений будет равносильна повороту стержня «со старыми закреплениями» на  $180^\circ$  вокруг своего серединного перпендикуляра, что не изменит звучания. Однако эти рассуждения не составляют суть исследования. Основной результат – это теорема о двойственности решения поставленной задачи, которая означает не то, что «симметричные» закрепления однородного стержня звучат одинаково, а то, что всего решений ровно два, т.е. кроме двух «симметричных» закреплений, других закреплений с таким же спектром частот не бывает. Например, стержень, закрепленный упруго на одном конце с коэффициентами жесткостей пружинок 1 и 2 и заделанный на другом конце, не прозвучит так же, как стержень, закрепленный на обоих концах упруго с коэффициентами жесткостей пружинок 1 и 1.

Нами было также показано, что для определения закреплений обоих концов стержня не обязательно знать все собственные частоты. Достаточно лишь 9 собственных частот.

Предположим теперь, что закрепление на одном из концов стержня известно. Тогда из теоремы о двойственности решения нашей задачи следует, что закрепление на другом его конце определяется по 9 собственным частотам уже однозначно, т.е. следствием теоремы о двойственности решения является теорема о единственности решения задачи определения одного из концов стержня по 9 собственным частотам. Однако в более ранней работе для случая диагностирования одного из концов стержня было доказано еще более сильное утверждение: для однозначного определения закреплений на одном из концов стержня достаточно лишь трех собственных частот [3].

Позже корректность задачи была показана и для неоднородных стержней и для стержней с более сложным видом закреплений. Выяснилось, что в отличие от однородного

стержня, в случае неоднородного стержня два найденных решения уже не являются «симметричными». Взаимосвязь между ними более сложная.

Таким образом, ответ на вопрос о том, можно ли по собственным частотам идентифицировать вид и параметры закрепления стержня, был получен. Однако получен он был только в рамках так называемой теории стержня Эйлера-Бернулли, которая не учитывает инерцию поворота и деформации сдвига поперечных сечений. А что будет в рамках других (уточненных) теорий, например, в рамках теории балки Тимошенко? И в рамках уточненных теорий можно доказать корректность постановок соответствующих задач. Конкретные решения при этом несколько изменятся. Поэтому нужны физические эксперименты, которые покажут, насколько ближе эти решения к эксперименту и стоит ли вообще пользоваться уточненными теориями с большим объемом громоздких вычислений.

И еще об одном вопросе, касающемся идентификации закрепления стержня. Закрепления, которые мы рассматриваем, могут быть только следующими: заделка, плавающая заделка, свободный конец, свободное опирание и различные виды упругого закрепления. Случаи закрепления с прикрепленной массой на конце и с вязким трением на конце исключались. Что будет, если их не исключать? Тогда по собственным частотам уже найдутся не два, а большее число решений. Сколько же? Исчерпывающего ответа на этот вопрос пока не найдено.

А как с другими механическими распределенными системами – пластинами, мембранами и струнами? Можно ли услышать вид их закрепления? Соответствующие исследования были проведены и для этих механических систем. Одна из опубликованных статей так и называлась: Можно ли определить вид колеблющейся пластины по ее звучанию? [4]. В этой статье было показано, что для однородной круговой пластины вид и параметры закрепления определяются однозначно по трем собственным частотам ее изгибных симметричных колебаний. Позже аналогичные результаты были получены для пластин переменной толщины [5] и для общего случая колебаний (не обязательно симметричных). Была доказана также устойчивость решения относительно малых возмущений собствен-

ных частот. Устойчивость важна для создания приборов диагностики закрепленных. Дело в том, что при определении закрепленных с помощью приборов возможны небольшие искажения в определении частот. Устойчивость решения гарантирует, что при малых изменениях собственных частот наше решение (найденное закрепление) также изменится мало. Это означает, что даже если будут незначительные ошибки в определении собственных частот, диагностика все равно будет удовлетворительной.

Помимо теорем устойчивости и единственности, была получена теорема существования решения. В совокупности эти теоремы (существования, единственности и устойчивости) означают корректность постановки задачи об отыскании вида и параметров закрепления пластины по собственным частотам ее колебаний.

Корректность была доказана и для струн, а также кольцевых мембран и пластин: для кольцевой мембраны закрепление на внешнем и внутреннем контурах также однозначно определяется по трем собственным частотам ее колебаний [6]. А вот для однозначной идентификации закреплений на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины потребуются уже пятнадцать собственных частот [7].

В описанных выше результатах предполагалось, что закрепление пластин и мембран является одинаковым по всей границе. На практике так бывает не всегда. Часто пластина или мембрана бывает закреплена на различных участках контура по-разному. Спрашивается, можно ли по звучанию такой колеблющейся пластины или мембраны определить, как она закреплена на каждом участке контура? Для прямоугольной мембраны, которая по-разному закреплена на каждой из своих сторон, было показано следующее: количество жестко закрепленных и свободных сторон прямоугольной мембраны однозначно распознается по первому собственному значению, а упругие закрепления однозначно диагностируются с точностью до перестановок закреплений на противоположных сторонах по четырем собственным частотам [8]. Похожие результаты были получены и для прямоугольной пластины [9].

Для круговых пластин и мембран полного ответа на вопрос о том, как они закреплены на частях своих границ, пока нет. Однако по-

мочь в ответе на него могут исследования о диагностировании закреплений графов из струн или стержней. Напомним, что в математике графом именуют набор точек, некоторые из них соединены линиями. Точки именуются вершинами графа, а отрезки – ребрами. Например, схему московского метро можно рассматривать как граф, вершины которого – конечные станции и станции пересадок, ребра – пути, соединяющие эти станции. Наши исследования показывают, что если рассмотреть граф, состоящий из точки и отрезков-струн одинаковой длины, исходящих из этой точки, то закрепления на тупиковых вершинах этого графа диагностируются по собственным частотам его колебаний однозначно с точностью до перестановок закреплений на тупиковых вершинах. Аналогичный вывод можно сделать и для графа из стержней. Такие графы из струн и стержней можно рассматривать как некоторое приближение круговых мембран и пластин [10], поэтому наши исследования о закреплениях графов подтверждают возможность диагностирования закреплений круговых мембран и пластин.

Исследования о диагностировании закреплений графов интересны и сами по себе. Ведь существуют графы различных конфигураций. Как диагностируются закрепления общих графов по собственным частотам их колебаний, пока неизвестно. Соответствующие исследования еще не проводились. Теорию диагностирования закреплений графов по собственным частотам их колебаний еще предстоит создать.

Предстоит ответить на многие вопросы и по диагностированию закреплений трубопроводов и других оболочек. Эти исследования важны не только для акустической диагностики. Они еще более значимы для другой важной области – теории снижения шума.

Проблема снижения вредного воздействия шума и звуковой вибрации относится к числу тех проблем, с которыми человечество столкнулось в древнейшие времена. Трудно сказать, когда были сделаны первые практические шаги в решении этой проблемы, однако цивилизации Древнего мира, безусловно, достаточно ясно осознавали их необходимость. Об этом свидетельствует, в частности, древнешумерский эпос о Гильгамеше (около XXVII – XXVI вв. до н.э.), в котором содержится весьма своеобразная трактовка большого на-



воднения как противозумового мероприятия, осуществленного шумерским богом в наказание человечеству за чрезмерный шум на Земле. Одним из первых актов, регулировавших шум в городе, стал обязательный запрет, принятый в древнегреческой колонии Сибарис (VIII в. до н. э.). Он не позволял мастерам-ремесленникам располагать свои мастерские в пределах городских стен. Таким образом, жители Сибариса – сибариты – стали, по-видимому, пионерами в деле ограничения промышленного шума и создания акустического комфорта в условиях городской среды. Однако до 40-х годов XX столетия попытки снижения шума носили, скорее, случайный и ограничительный, нежели систематический и научный характер.

Бурный прогресс техники привел к принципиальному изменению ситуации: повседневная жизнь человечества оказалась неразрывно связанной с многочисленными механизмами, устройствами, транспортными средствами, создающими интенсивные шум и вибрации. После Второй мировой войны во многих развитых странах развернулись всесторонние исследования последствий воздействия шума и вибрации на организм человека и животных. В результате было установлено, что от шума, в первую очередь, страдают центральная нервная и сердечно-сосудистая системы, а орган слуха поражается значительно позже. Выяснилось также, что первоначально принятые нормы на шум и вибрацию целого ряда машин и механизмов требуют значительного ужесточения. Следствием этого стали существенное ужесточение шумовых норм, проведенное в последние полтора-два десятилетия по отношению к целому ряду отраслевых шумовых стандартов (ограничений на шум самолетов, автомобилей и т. д.) и всплеск научных исследований по снижению шума и вибрации [11,12]. Однако научных работ по созданию закреплений, обеспечивающих нужный (безопасный) диапазон частот колебаний механических систем, не было. Напомним, что инфранизкие звуки, в интервале частот 5 – 7 Гц, оказывают вредное воздействие на здоровье человека. Особенно негативно они влияют на психику: поражаются все виды интеллектуальной деятельности, ухудшается настроение, иногда появляется ощущение растерянности, тревоги, испуга, страха; а при высокой интенсивности – чувство слабости, как после силь-

ного нервного потрясения. Даже слабые инфразвуки могут оказывать на человека серьезное воздействие, в особенности, если они носят длительный характер. Именно инфразвуками, проникающими сквозь самые толстые стены, обусловлены многие нервные болезни горожан. Опасны и ультразвуки свыше 4 000 кГц. Они способны разрушать живые ткани. Первыми жертвами таких частот стали рыбы, убитые и оглушенные ультразвуком, когда П. Ланжевен и Р. Вуд испытывали эхолот в порту Тулон (Франция). У человека при воздействии волн таких частот нередко наблюдаются функциональные отклонения нервной и сердечно-сосудистой систем, изменение давления, состава и свойств крови, головные боли, быстрая утомляемость. Человеческое ухо часто с трудом выносит даже просто очень высокий голос или резкий негромкий звук проведения мелом по стеклянной доске.

Поэтому и возникает задача отыскания таких закреплений, которые бы обеспечивали нужный (безопасный) диапазон частот колебаний. Математически это та же задача, которая решалась нами для акустической диагностики. Ведь там тоже требовалось идентифицировать закрепления по набору собственных частот. Полученные нами результаты для стержней, мембран и пластин переносятся без каких-либо изменений и на задачи виброзащиты. Однако, помимо этих результатов, были получены также и новые теоремы, касающиеся трубопроводов [13]. Пока в этом направлении сделаны лишь первые шаги. Предстоит ответить, например, на вопрос о том, как закреплять трубопроводы, в которых может протекать жидкость с меняющейся скоростью, чтобы колебания трубопровода оставались в нужном диапазоне частот. Эта задача важна для создания безопасных для здоровья человека холодильников, двигателей и механических устройств.

Отметим, что созданные нами методы были использованы также и в фундаментальной математике, в так называемой теории обратных спектральных задач. Если первоначально автор этой статьи получал результаты лишь по прямым задачам спектральной теории операторов, которые были поставлены его научным руководителем кандидатской диссертации профессором Московского государственного университета А.А. Шкаликовым [14–17], то в последующем возник интерес к обратным задачам. Выяснилось, что

методы по идентификации краевых условий могут быть эффективно использованы в области обратных спектральных задач, над решением которых работали такие выдающиеся ученые, как В.А. Амбарцумян, Г. Борг, Н. - Левинсон, М.Г. Крейн, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, а ныне занимаются В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие авторы (подробнее см. [18,19]). В частности, созданные методы идентификации краевых условий были применены к классическим обратным задачам Штурма-Лиувилля восстановления потенциала. На основе этих методов автором совместно с академиком В.А. Садовничим и профессором Я.Т. Султанаевым были доказаны теоремы о единственности и устойчивости решения обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями и предъявлены явные решения этой задачи, позволяющие решать ее численно [20-26]. Найденные методы были использованы также и для решения других обратных спектральных задач [27-30].

Отметим, что первыми результатами автора по идентификации краевых условий были теоремы об однозначности восстановления краевых условий задачи Штурма-Лиувилля. Однако тогда автор не мог до конца осознать, что означает восстановить краевые условия. Ведь однородные краевые условия могут иметь различные коэффициенты, но при этом совпадать. Некоторое время предпринимались попытки восстановить нормированные краевые условия, однако они не принесли нужного результата, поскольку из частотного уравнения по собственным значениям находятся не значения функций прогибов и ее производных, необходимых для получения нормированных краевых условий, а некоторые миноры.

Существенное продвижение дало понимание того, что восстановление краевых условий по собственным значениям связано с задачей линейной алгебры о восстановлении матрицы с точностью до линейной эквивалентности по ее минорам наибольшего порядка. Благодаря общению с алгебраистами Башкирского государственного университета доцентом Э.Г. Нейфельдом и ассистентом А.В. Муфтаховым (ныне докторантом Бар-Иланского университета Израиля) автор познакомился с некоторыми известными в алгебраической геометрии результатами, касающимися условий Плюккера. Это позволило автору разработать методы решения задачи восстановле-

ния краевых условий. Возможность новых применений методов алгебраической геометрии вызывало интерес у алгебраистов. Новый импульс исследованиям автора придала также заинтересованность механиков члена-корреспондента РАН М.А. Ильгамова и доцента Башкирского государственного университета С.Ф. Урманчеева (ныне директора Института механики Уфимского научного центра РАН).

После обсуждений полученных результатов на семинарах и конференциях возникли новые постановки задач. В частности, М.А. Ильгамовым были предложены еще две задачи, связанные с восстановлением краевых условий. Первую задачу он назвал обратной статической. Она формулировалась так: идентифицировать вид и параметры обоих концов стержня по прогибам стержня в нескольких его точках. Эта задача была также решена. Оказалось, что в отличие от ранее решенной задачи о восстановлении вида и параметров закрепления обоих концов стержня, эта новая задача имеет единственное решение. Конечно, и сам метод ее решения отличался от методов решения задач, рассмотренных выше. Впоследствии выяснилось, что эту задачу можно ставить и решать в более общей формулировке: идентифицировать вид и параметры закрепления концов стержня, а также нагрузки, действующие на стержень по его прогибам в некоторых точках. Эта задача также нами была решена, причем решение было найдено не только для стержня, но и для «звездных» графов из стержней [31]. Вторая задача М.А. Ильгамова была связана с поиском места и времени разрыва трубопровода, находящегося на дне моря, по показаниям тензодатчика. Эта задача была также решена, однако только в более частной постановке применительно к стержню [32].

Помимо приложений, созданных нами методов в акустической диагностике, теорий снижения шума и обратных спектральных задач, были найдены применения в диагностике сосредоточенных масс по собственным частотам колебаний соответствующих механических систем [30], в медицине [33] и в электродинамике при диагностировании условий замыкания провода [34].

По результатам описанных в настоящей статье исследований изданы две монографии [35,36]. В [36], помимо решений поставленных задач, приводится также 7 нерешенных про-

блем. Возможно, в скором будущем их удастся решить, а пока еще многое не ясно. Исследования продолжаются...

### Литература

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Определение вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. 2008. Т.54, № 2. С. 181 – 188.
3. Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290 – 298.
4. Ахтямов А.М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 3. С. 325 – 331.
5. Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. Vol. 12. No. 4. P. 393–408.
6. Ахтямов А.М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. МММИУ. 2001. Т. 5. № 3. С. 103 – 110.
7. Ахтямов А.М. Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 137 – 147.
8. Ахтямов А.М. Диагностика закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам ее колебаний // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 3. С. 293 – 296.
9. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Тайхер М., Ямилова Л.С. Об одном методе определения по собственным частотам условий закрепления прямоугольной пластины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 1. С. 100 – 113.
10. Покорный Ю. В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
11. Кравчун П.Н. Генерация и методы снижения шума и звуковой вибрации. М.: Изд-во МГУ, 1991.
12. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Эффекты локализации упругих волн в теории и на практике // Российская наука: день нынешний и день грядущий. Сборник научно-популярных статей / Под ред. академика В.П. Скулачева. М.: Academia. 1999. С. 49–54.
13. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т.49. № 1. С. 139–147.
14. Ахтямов А.М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи // Математические заметки. 1992. Т.51. №6. С. 137–139.
15. Ахтямов А.М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Известия вузов. Математика. 2000. №2. С. 13–18.
16. Ахтямов А.М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша для одной эллиптической задачи с параметром в граничном условии // Математические заметки. 2001. Том 69. Вып. 4. С. 622 – 624.
17. Ахтямов А.М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевых задач с параметром в граничных условиях // Математические заметки. 2004. Т.75. Вып. 4. С. 493 – 506.
18. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984.
19. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М: Физматлит, 2007.
20. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Доклады Академии наук. 1999. Т. 367. № 6. С. 739 – 741.
21. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. О корректности обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 5. С. 592 – 595.
22. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями I // Евразийский математический журнал. 2005, № 2. С. 57 – 75.
23. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями II // Евразийский математический журнал. 2005, № 3. С. 99 – 117.
24. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля. Теоремы единственности и контрпримеры // Доклады Академии наук. 2006. Т.411. № 6. С. 747–750.
25. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Разрешимость обратной задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2007. Т.412. №1. С. 26 – 28.
26. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля с обобщенными периодическими краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2008. Т.421. №5. С. 599 – 601.

27. Ахтямов А.М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127 – 1128.

28. Ахтямов А.М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, Вып. 4. С. 995 – 1006.

29. Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. № 8. С. 1011 – 1015.

30. Ахтямов А.М. Диагностирование нагруженности механической системы // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2003. № 6. С. 60.

31. Ахтямов А.М., Нафикова Э.Р. Восстановление краевых условий и функций нагрузки // Контроль. Диагностика. 2007. № 9. С. 50 – 52.

32. Ахтямов А.М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. 2007. № 11. С. 59 – 60.

33. Супин А.Я. Как измерить остроту слуха? // Российская наука: день нынешний и день грядущий. С. 256 – 265.

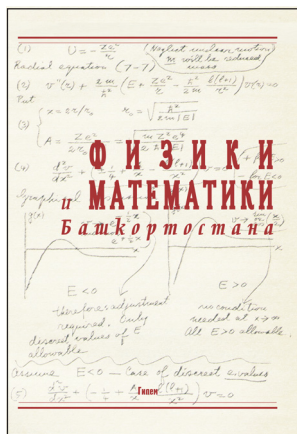
34. Ахтямов А.М., Ямилова Л.С. Идентификация условий замыкания провода по собственным частотам колебаний напряжения переменного тока // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. Т. 11. № 2 – 3. С. 15 – 17.

35. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М.: Изд-во МГУ, 2008.

36. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008.

## К сведению читателей:

Вышла книга:



**Физики и математики Башкортостана:** Информационно-справочное издание / Отв. ред. член-корр. АН РБ В.А. Мазунов. Уфа: Гилем, 2008. 278 с.

Издание подготовлено в ИФМК УНЦ РАН и содержит сведения о физиках и математиках, работающих в вузах и академических учреждениях республики, их биографические и библиографические данные, а также контактные телефоны и электронные адреса.

Для широкого круга специалистов, особенно – для научной молодежи.