

Научная статья

УДК 517.925.42+517.958

ББК 22.161.6

У 95

DOI: 10.53598/2410-3225-2021-3-286-32-41

Ацикличность квадратичной системы

(Рецензирована)

Адам Дамирович Ушхо¹, Вячеслав Бесланович Тлячев²,
Дамир Салихович Ушхо³

^{1, 2, 3} Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

¹ uschho76@mail.ru

² tlyachev@adygnet.ru

³ damirubych@mail.ru

Аннотация. Дан краткий обзор некоторых основных публикаций, посвященных исследованию вопроса о предельных циклах и сепаратрисах квадратичных дифференциальных систем. Рассмотрено наличие замкнутых траекторий для определенного класса автономных квадратичных систем на плоскости. Доказательство основано на применении теории прямых изоклин, признаков Дюлака и Бендиксона качественной теории дифференциальных уравнений. Предложенное доказательство покрывает результаты известной работы Л.А. Черкаса и Л.С. Жилевич.

Ключевые слова: автономная квадратичная система дифференциальных уравнений, инвариантная прямая, изоклина, предельный цикл, аффинное преобразование, состояние равновесия

Original Research Paper

The acyclicity of a quadratic differential system

Adam D. Ushkho¹, Vyacheslav B. Tlyachev², Damir S. Ushkho³

^{1, 2, 3} Adyghe State University, Maikop, Russia.

¹ uschho76@mail.ru

² tlyachev@adygnet.ru

³ damirubych@mail.ru

Abstract. We now give a brief overview of some of the main publications devoted to the study of the question of limit cycles and separatrices of quadratic differential systems. In this paper, we consider the existence of closed trajectories for a certain class of autonomous quadratic systems on the plane. The proof is based on the application of the theory of straight line isoclines, Dulac and Bendixon criteria of the qualitative theory of differential equations. The proposed proof covers the results of the well-known work of L.A. Cherkas and L.S. Zhilevich.

Keywords: autonomous quadratic system of differential equations, invariant line, isocline, limit cycle, affine transformation, equilibrium state

Введение

Период активного изучения вопроса о предельных циклах и сепаратрисах квадратичных систем приходится на 60–70-е годы прошлого столетия. Однако были отдельные публикации по данной тематике и ранее. Так, например, Н.Н. Баутин в работе

[1] нашел достаточные условия существования устойчивого предельного цикла системы нелинейных колебаний

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^2. \end{cases}$$

Авторами работы [2] доказано, что дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$,

где P и Q – взаимно простые многочлены второй степени, имеет не более трех предельных циклов. Однако эта оценка оказалась ошибочной. Впоследствии китайские математики построили пример квадратичной системы, имеющей четыре предельных цикла [3]. Китайский математик Тун-Цзинь-чжу исследовал вопрос о взаимном расположении предельных циклов квадратичной системы [4].

Авторы статьи [5] приводят достаточные условия существования единственного предельного цикла для дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx} = \frac{-x + ax^2 + (bx + c)u + du^2}{u(u+1)}. \quad (1)$$

Позже Г.С. Рычковым доказано, что уравнение (1) имеет не более одного предельного цикла [6]. Белорусским математиком А.И. Яблонским впервые построена квадратичная система, имеющая предельный цикл в виде алгебраической кривой четвертого порядка [7].

В статье [8] найдены достаточные условия существования у квадратичной системы предельного цикла в виде алгебраической кривой четвертого порядка.

В заметке [9] найдены достаточные условия существования у системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -my + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2, \end{cases}$$

петли сепаратрисы седла и предельного цикла, окружающих одновременно одно и то же состояние равновесия типа фокуса.

Представляется интересной работа [10], в которой построено все множество квадратичных систем, из траекторий которых состоит улитка Паскаля. Доказано, что такие системы алгебраически интегрируемы, а значит, не имеют изолированных периодических решений.

Особо следует отметить большой вклад, который внесли профессор Л.А. Черкас и его ученики в решение различных проблем, связанных с предельными циклами квадратичных систем. Тому подтверждение его ранние многочисленные публикации в соавторстве с Л.С. Жилевич, обзорная статья [11], а также более поздние публикации [12–14]. В статье [14] строятся квадратичные системы с четырьмя предельными циклами, три из которых окружают один фокус, а четвертый – второй фокус системы. В [14] отмечается, что у квадратичной системы не может быть предельного цикла, окружающего более одного состояния равновесия. При этом автор ссылается на статью [12]. В этой связи следует заметить, что отмеченный факт доказан еще ранее в работе [4] и может быть доказан элементарно на основании следствия 4 из теоремы 6 [15].

В данной работе рассматривается класс квадратичных систем, имеющих четыре состояния равновесия, два из которых являются негрубыми фокусами или седлами с равными по модулю характеристическими числами.

Основные результаты

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где P и Q имеют непрерывные частные производные не ниже первого порядка в области $G \subset R^2$.

Лемма 1. Если к системе (2) применить невырожденное преобразование

$$\begin{cases} x = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \\ y = \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta, \end{cases} \quad (3)$$

то дивергенция $D(x, y) = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)$ векторного поля системы (2) трансформируется в дивергенцию

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = D(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta).$$

Доказательство. Преобразование (3) переводит систему (2) в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{\Delta} [\delta P(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta) - \beta Q(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta)] \equiv \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{1}{\Delta} [-\gamma P(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta) + \alpha Q(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta)] \equiv \bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (4)$$

где $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что дивергенция

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{P}'_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{Q}'_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})$$

действительно определяется равенством

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = P'_x(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta) + Q'_y(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \omega, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} + \eta).$$

Лемма доказана.

Пусть, далее, система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_2, Q_2) = 1$, имеет четыре состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, два из которых являются состояниями равновесия второй группы.

Замечание 1. Состоянием равновесия второй группы по терминологии [16] называется состояние равновесия, корни характеристического уравнения которого комплексно-сопряженные с равной нулю действительной частью и для которого возникает проблема отличия центра от фокуса.

В силу нашего предположения о характере состояния равновесия системы (5) путем надлежащего невырожденного линейного преобразования можно ее привести к так называемой канонической форме записи [17–19]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2), \\ \frac{dy}{dt} = (a_3x + b_3y + c_3)(a_4x + b_4y + c_4). \end{cases} \quad (6)$$

Введем обозначение $l_i : a_ix + b_iy + c_i = 0$ ($i = \overline{1,4}$). Для определенности положим, что состояния равновесия второй группы системы (6) принадлежат прямой l_2 . Согласно упомянутым работам [17–19], состояния равновесия системы (6) расположены в вершинах выпуклого четырехугольника, а прямые изоклины бесконечности l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке $A(x_0, y_0)$, которая состоянием равновесия быть не может [19, 20].

Применим к системе (6) преобразование

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

и при этом условимся сохранить обозначения фазовых переменных x и y .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y)(A_2x + B_2y), \\ \frac{dy}{dt} = (A_3x + B_3y + C_3)(A_4x + B_4y + C_4). \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, $C_3C_4 \neq 0$, так как в противном случае $A(x_0, y_0)$ – состояние равновесия системы (6).

Априори предполагается, что система (6) не имеет инвариантной прямой, ибо в противном случае эта система не имеет изолированных периодических решений [21].

Отметим, что в результате параллельного переноса начала координат системы (6) в точку $A(x_0, y_0)$ прямая l_i перешла в прямую $\bar{l}_i$ ($i = \overline{1,4}$), причем $\bar{l}_{1,2}$ – изоклины бесконечности, $\bar{l}_{3,4}$ – изоклины нуля системы (7).

Применим к системе (7) преобразование

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = A_2x + B_2y, \end{cases}$$

в результате которого получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (\tilde{A}_1\bar{x} + \tilde{B}_1\bar{y})\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3\bar{x} + \tilde{A}_4\bar{y} + \tilde{A}_5\bar{x}^2 + \tilde{A}_6\bar{x}\bar{y} + \tilde{A}_7\bar{y}^2. \end{cases} \quad (8)$$

Вводя в системе (8) новый масштаб времени по формуле $d\tau = \tilde{B}_1 dt$, окончательно получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = (\bar{y} + k\bar{x})\bar{y} \equiv \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \alpha + \beta\bar{x} + \gamma\bar{y} + \delta\bar{x}^2 + \omega\bar{x}\bar{y} + \eta\bar{y}^2 \equiv \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$k\alpha\delta \neq 0. \quad (10)$$

Замечание 2. Коэффициенты системы (9) не имеют ничего общего с коэффициентами преобразования (3).

Согласно лемме 1, состояния равновесия второй группы системы (9) принадлежат прямой $\bar{y} = 0$, поэтому

$$\bar{P}'_{2\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{Q}'_{2\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \mu\bar{y}, \quad \mu \neq 0. \quad (11)$$

Тождество (11) запишем в виде:

$$(k + 2\eta)\bar{y} + \omega\bar{x} + \gamma \equiv \mu\bar{y}. \quad (12)$$

При $\bar{y} = 0$ из (12) получаем

$$\omega = \gamma = 0. \quad (13)$$

С учетом (13) система (9) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = (\bar{y} + k\bar{x})\bar{y} \equiv \tilde{P}_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \alpha + \beta\bar{x} + \delta\bar{x}^2 + \eta\bar{y}^2 \equiv \tilde{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2. Если система (5) имеет четыре состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе два состояния равновесия второй группы и два седла, но не имеет инвариантной прямой, то существует аффинное преобразование переменных x и y , приводящее эту систему к системе (14) с условием (10).

Теорема 1. Если система (5) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия, в том числе два состояния равновесия второй группы и два седла, но не имеет инвариантной прямой, то эта система ациклична.

Доказательство. По лемме 2 вместо системы (5) рассмотрим систему (14), удовлетворяющую условию (10). На прямой $\bar{y} = 0$ расположены два состояния равновесия второй группы $W_1(\bar{x}_1, 0)$ и $W_2(\bar{x}_2, 0)$, где

$$\bar{x}_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta}}{2\delta}, \quad \bar{x}_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta}}{2\delta}.$$

Так как $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 < 0$, то $\alpha\delta < 0$. При $\eta \neq 0$ изоклина нуля есть гипербола или эллипс, в противном случае – пара прямых, параллельных оси ординат.

Пусть $\eta = 0$. Поскольку $\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)_{\bar{x}=0} = \bar{y}^2 \geq 0$, то прямая $\bar{x} = 0$ не имеет контакта с траекториями системы (14). Применим к системе (14) критерий Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака $D_0(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\bar{x}}$.

$$(\tilde{P}_2 D_0)'_{\bar{x}} + (\tilde{Q}_2 D_0)'_{\bar{y}} = -\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2} \leq 0. \quad (15)$$

Согласно критерию Дюлака, для односвязной области [22] из (15) следует ацикличность системы (14).

Для определенности при $\eta \neq 0$ полагаем, что изоклина нуля системы (14) явля-

ется гиперболой.

Рассмотрим функцию

$$\Delta(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\tilde{Q}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\tilde{P}_2(\bar{x}, \bar{y})} + \frac{\tilde{Q}_2(\bar{x}, -\bar{y})}{\tilde{P}_2(\bar{x}, -\bar{y})} = \frac{2(\alpha + \beta\bar{x} + \delta\bar{x}^2 + \eta\bar{y}^2)}{(\bar{y} + k\bar{x})(\bar{y} - k\bar{x})}. \quad (16)$$

Удовлетворим условию (10), считая выполненными неравенства

$$k > 0, \quad \alpha > 0, \quad \delta < 0. \quad (17)$$

В силу (17) состояние равновесия W_1 расположено в области

$$G_1 = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{x} > 0, \bar{y} + k\bar{x} > 0, \bar{y} - k\bar{x} > 0\}.$$

В области

$$G_2 = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{x} > 0, \alpha + \beta\bar{x} + \delta\bar{x}^2 + \bar{x} > 0, \bar{y} - \eta k\bar{y}^2 < 0\}$$

выражение (16) положительно, а в области $G_1 \setminus G_2$ – отрицательно. Предположим, что точку W_1 окружает замкнутая траектория L системы (14). Дугу траектории L , расположенную в полуплоскости $\bar{y} < 0$ ($\bar{y} > 0$), обозначим L_1 (L_2). Тогда дуга $\bar{L}_2$, симметричная дуге L_2 относительно прямой $\bar{y} = 0$, расположена выше дуги L_1 .

Поэтому имеет место равенство

$$\iint_{D_1} (k + 2\eta)\bar{y}d\bar{x}d\bar{y} = 0, \quad k + 2\eta \neq 0,$$

где D_1 – односвязная область, содержащая точку W_1 и ограниченная дугами L_1 и $\bar{L}_2$. Отсюда следует, что

$$\iint_D (k + 2\eta)\bar{y}d\bar{x}d\bar{y} \neq 0, \quad (18)$$

где D – односвязная область, содержащая точку W_1 и ограниченная замкнутой кривой L . Но неравенство (18) противоречит существованию замкнутой траектории L , окружающей точку W_1 .

Аналогично доказывается отсутствие у системы (2) замкнутой траектории, окружающей состояние равновесия W_2 .

Теорема доказана.

Замечание 3. В процессе доказательства теоремы 1 можно взять любое другое сочетание знаков коэффициентов k , α , δ , удовлетворяющих условию (10).

Замечание 4. Если предположить, что на прямой $\bar{y} = 0$ система (9) имеет два седла с равными по модулю характеристическими числами, то, как следует из признака Бендиксона [22], система (9) ациклична в областях $\bar{y} > 0$ и $\bar{y} < 0$.

Поэтому справедлива

Теорема 2. Если квадратичная система (5) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия, в том числе два негрубых фокуса и два седла или два седла с равными по модулю характеристическими числами и два антиседла, но не имеет инвариантной прямой, то эта система ациклична.

Замечание 5. Антиседло – это простое состояние равновесия, не являющееся седлом.

Замечание 6. В формулировке теоремы 2 существенным является тот факт, что система не имеет инвариантной прямой.

Так, система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

имеет инвариантную прямую $x = 0$, два простых седла $(0, \pm 2)$ и два центра $(\pm 2, 0)$, то есть система имеет замкнутые траектории (см. рис. 1).

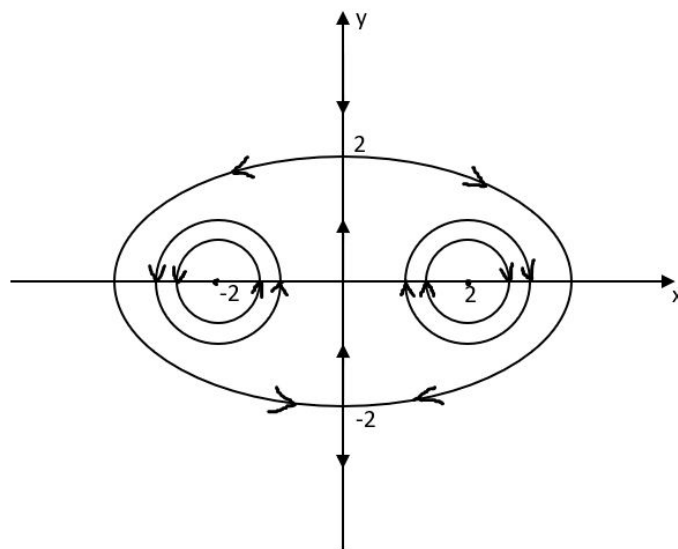


Рис. 1. Поведение траекторий системы (19) в ограниченной части фазовой плоскости

Fig. 1. Behavior of system (19) trajectories in the limited part of a phase plane

Заключение

В работе [2] доказано отсутствие предельных циклов дифференциального уравнения траекторий квадратичной системы специального вида, а именно, системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + xy, \\ \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2. \end{cases} \quad (20)$$

Основной результат работы [23] формулируется так: если дифференциальное уравнение траекторий системы (20) имеет два негрубых фокуса, или негрубый фокус и седло с равными по модулю характеристическими числами, или два седла, каждое из которых имеет характеристические числа, равные по модулю, то это уравнение не имеет предельных циклов.

В этой связи необходимо обратить внимание на тот факт, что квадратичная система (5) может иметь два негрубых фокуса не только в том случае, когда одна из главных изоклин является гиперболой (как в системе (20)), но и в случае, когда она является эллипсом (см., например, работу [24]).

Список литературы

1. Баутин Н.Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл // Журнал технической физики. 1939. Т. 9, № 7. С. 601–611.

2. Петровский И.Г., Ландис Е.М. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dt} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q – многочлены второй степени // Математический сборник. 1955. Т. 37 (79), № 2. С. 209–250.
3. Sonling Shi. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // Scientia Sinica. 1980. Vol. 23, No. 2. P. 153–158.
4. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150–168.
5. Черкас Л.А., Жилевич Л.И. Некоторые признаки отсутствия и единственности предельных циклов // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 7. С. 1170–1178.
6. Рычков Г.С. О предельных циклах уравнения $u(x+1)du = (-x + ax^2 + bxu + cu + du^2)dx$ // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2257–2259.
7. Яблонский А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1752–1760.
8. Филиппов В.Ф. Об алгебраических предельных циклах // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 7. С. 1281–1288.
9. Тешев Р.М., Ушхо Д.С. О предельных циклах и сепаратрисах одной квадратичной системы // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1096–1097.
10. Дружкова Т.А., Сиротина Е.А. Улитка Паскаля как интегральная кривая квадратичного уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2008. № 3. С. 120–125.
11. Черкас Л.А. Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 779–802.
12. Cherkas L.A., Dovnar S.I. Some unexpected properties of limit cycles of quadratic systems in the plane // Publicacions del CRM. Barcelona. Stener, 1999. Preprint 402.
13. Cherkas L.A., Artes I.S., Llibre I. Quadratic systems with limit cycles of normal size // Bulletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2003. No. 1 (41). P. 31–46.
14. Сидоренко И.В. Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1: Математика и информатика. 2008. № 3. С. 63–68.
15. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.
16. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.
17. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2 (15). С. 3–18.
18. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп: Изд-во АГУ, 2007. 93 с.
19. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Полиномиальные векторные поля на плоскости Избранные вопросы. Майкоп: Изд-во АГУ, 2012. 326 с.
20. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.
21. Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов для одного дифференциального уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 5. С. 779–783.
22. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.
23. Черкас Л.А., Жилевич Л.И. Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2271–2273.

24. Тлячев В.Б., Ушко А.Д., Ушко Д.С. Об отсутствии предельных циклов квадратичной системы // Труды физического общества Адыгеи. 2020. № 26. С. 14–23.

References

1. Bautin N.N. On one differential equation having a limit cycle // Journal of technical physics. 1939. Vol. 9, No. 7. P. 601–611.
2. Petrovsky I.G., Landis E.M. On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dt} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, where P and Q are polynomials of the second degree // Mathematical Bulletin. 1955. Vol. 37 (79), No. 2. P. 209–250.
3. Sonling Shi. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // Scientia Sinica. 1980. Vol. 23, No. 2. P. 153–158.
4. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$ // The periodic collection of transfers of foreign articles: Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168; Sci. Sinica, 1959. Vol. 8, No. 2. P. 151–171.
5. Cherkas L.A., Zhilevich L.I. Some signs of absence and uniqueness of limit cycles // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 7. P. 1170–1178.
6. Rychkov G.S. On the limit cycles of an equation $u(x+1)du = (-x + ax^2 + bxu + cu + du^2)dx$ // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 12. P. 2257–2259.
7. Yablonsky A.I. Algebraic integrals of one system of differential equations // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 10. P. 1752–1760.
8. Filiptsov V.F. On algebraic limit cycles // Differential Equations. 1973. Vol. 9, No. 7. P. 1281–1288.
9. Teshev R.M., Ushkho D.S. On limit cycles and separatrices of one square-law system // Differential Equations. 1995. Vol. 31, No. 6. P. 1096–1097.
10. Druzhkova T.A., Sirotina E.A. Pascal's limaçon as an integral curve of a quadratic equation // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2008. No. 3. P. 120–125.
11. Cherkas L.A. Methods for estimating the number of limit cycles of autonomous systems // Differential Equations. 1977. Vol. 13, No. 5. P. 779–802.
12. Cherkas L.A., Dovnar S.I. Some unexpected properties of limit cycles of quadratic systems in the plane // Publicacions del CRM. Barcelona. Stener, 1999. Preprint 402.
13. Cherkas L.A., Artes I.S., Llibre I. Quadratic systems with limit cycles of normal size // Bulletinul Academiei de Stiinta a Republicii Moldova. Matematica. 2003. No. 1 (41). P. 31–46.
14. Sidorenko I.V. Limit cycles of normal size for some classes of quadratic systems on the plane // Journal of the Belarusian State University. Ser. 1: Mathematics and Informatics. 2008. No. 3. P. 63–68.
15. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Equilibrium states and adjacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.
16. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. Nonlinear oscillations in second-order systems. Minsk: BSU Publishing House, 1982. 208 p.
17. Berlinsky A.N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of Higher Schools. 1960. No. 2 (15). P. 3–18.
18. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop: ASU Publishing House, 2007. 93 p.
19. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Polynomial vector fields on the plane. Selected questions. Maikop: ASU Publishing House, 2012. 326 p.
20. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

21. Cherkas L.A. On the lack of limit cycles for one equation having non-rough focus // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 5. P. 779–783.
22. Qualitative theory of second-order dynamic systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1966. 568 p.
23. Cherkas L.A., Zhilevich L.I. The absence of limit cycles of a certain differential equation // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 12. P. 2271–2273.
24. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On the absence of limit cycles of a quadratic system // Proceedings of the Physical Society of Adyghea. 2020. No. 26. P. 14–23.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.07.2021; одобрена после рецензирования 19.08.2021; принята к публикации 20.08.2021.

The article was submitted 20.07.2021; approved after reviewing 19.08.2021; accepted for publication 20.08.2021.

© А.Д. Ушхо, В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо, 2021