ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

АРГУМЕНТ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Р. Н. Бояринов (г. Москва)
roma_boyarin@yahoo.com

Настоящая работа посвящена обзору последних результатов в теории аргумента дзета-функции Римана $S(t)$. Дадим необходимые определения и опишем простейшие свойства $S(t)$.

Определение 1. *Для вещественного* t*, отличного от ординаты нуля* $\zeta(s)$*, положим*

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right),$$

где $\arg \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ *получается непрерывным продолжением* $\arg\zeta(s)$ *вдоль ломаной линии, начинающейся в точке* $s = 2$ *(*$\arg\zeta(2) = 0$*), идущей к точке* $s = 2 + it$ *и затем к точке* $s = 1/2 + it$*. Если же* t *— мнимая часть нуля* $\zeta(s)$*, то*

$$S(t) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{2}(S(t+\delta) + S(t-\delta)).$$

Определение 2. *Для положительного* T*, отличного от мнимой части нуля* $\zeta(s)$*, символом* $N(T)$ *будем обозначать число нулей дзета-функции в прямоугольнике* $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, s \leqslant T$*. Если* T *совпадает с мнимой частью нуля* $\zeta(s)$*, то положим*

$$N(T) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{2}(N(T+\delta) + N(T-\delta)).$$

Нижеследующая теорема описывает простейшие свойства $S(t)$.

Теорема 1. **([1], с. 45).** *Справедливы следующие утверждения:*

1. $S(t)$ *— кусочно-гладкая функция с разрывами в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей* $\zeta(s)$*.*

2. *При переходе через точку разрыва* $S(t)$ *совершает скачок, равный сумме кратностей нулей* $\zeta(s)$*, имеющих эту точку своей ординатой.*

3. *На всяком промежутке непрерывности* (γ, γ'), *где* γ, γ' — *соседние ординаты нулей* $\zeta(s)$, *функция* $S(t)$ *является монотонно убывающей с производными*

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \quad \text{и} \quad S''(t) = -\frac{1}{2\pi t} + O(t^{-3}).$$

Одной из задач теории аргумента дзета-функции Римана является проблема определения порядка роста величины $M(T)$ — числа перемен знака $S(t)$ на промежутке $0 < t \leqslant T$. Первый результат здесь принадлежит Г. Бору и Э. Ландау [2], которые в 1913 г. доказали существование положительной постоянной c такой, что

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{(\ln t)^c} = -\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{(\ln t)^c} = +\infty.$$

Отсюда следует, что функция $S(t)$ при $t \to +\infty$ меняет свой знак бесконечно много раз. В 1946 г. А. Сельберг [3] разработал новый метод, с помощью которого получил следующую нижнюю оценку числа точек перемены знака $S(t)$ на промежутке $(T, T+H]$:

$$M(T+H) - M(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{3}}e^{-c_1\sqrt{\ln\ln T}}.$$

Длина H рассматриваемого промежутка имела вид $T^{0,5+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leqslant 0,5$ — произвольное фиксированное число.
Дальнейшее уточнение этого результата происходило по двум направлениям. Первое связано с нахождением нижних оценок разности $M(T+H) - M(T)$ при $H = T^a$, $0 < a < 1/2$, а второе — с заменой правой части неравенства Сельберга функцией, растущей быстрее, чем $H(\ln T)^{\frac{1}{3}}e^{-c_1\sqrt{\ln\ln T}}$.

В 1981 г. А. Гош [4] доказал, что при $H = T^{a+\varepsilon}$

$$M(T+H) - M(T) > H(\ln T)\exp\left(-\frac{c_2\ln\ln T}{(\ln\ln\ln T)^{0,5-\delta}}\right),$$

где $0 < \delta < 1/2$. При этом величину a можно брать равной нулю, если гипотеза Римана верна, и равной $0,5$ в противном случае.

Наконец, в 1996 г. А. А. Карацуба [5] доказал неравенство А. Сельберга при $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Далее, в 2002 г. М. А. Королев [6, 7] доказал результат А. Гоша при $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Отметим, что вопрос об истинном порядке роста $M(T)$ при $T \to +\infty$ в настоящее время остается открытым.

В 2009 г. Р. Н. Бояриновым была доказана теорема о дробных моментах случайных величин, из которой следует более лучший результат о числе перемен знака $S(t)$ и другие более сильные результаты о дробных моментах арифметических сумм.

В 1998 г. Р. Вон и Т. Вули [8] при исследовании распределения значений некоторых тригонометрических сумм получили асимптотические формулы для дробных моментов этих сумм. Изучая распределение нулей дзета-функции Римана, в 2008 г. М. А. Королев [9] получил асимптотические формулы для дробных моментов некоторых характеристик этих нулей.

Р. Н. Бояриновым предлагается метод, позволяющий получать асимптотические формулы для дробных моментов случайных величин с более лучшими остатками и для более широкого множества значений параметра по сравнению с результатами работ [7-9].

Сформулируем следствие более общей теоремы Р. Н. Бояринова о дробных моментах случайных величин.

Рассмотрим полное вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Пусть $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, а $F_n(x) = \mathbb{P}(\omega : |\xi_n(\omega)| < x)$ — функция распределения, где n — некоторый вещественный параметр, а $x > 0$. Обозначим $m_a(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^a dF_n(x)$ — a-ый момент случайной величины ξ_n. Пусть, далее, $[x]$ — целая часть x. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geqslant 1$ такая, что для любого $n > n_0$ и любых целых чисел $1 \leqslant \nu \leqslant [\varrho \ln f(n)] + 1$, где $0 < \varrho \leqslant 0.1$ — некоторая постоянная, справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \quad |\theta| \leqslant 1,$$

где $f(\,\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $0 < a \leqslant 0.5\varrho \ln f(n)$ справедливо равенство:

$$m_a(n) = \mu(a) + \theta R_n,$$

где $\mu(a)$ — некоторая функция параметра a, $|\theta| \leqslant 1$ и

$$R_n = \begin{cases} R_1\,, & 0 < a < 30\,;\\ R_2\,, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}}\sqrt{\ln f(n)}\,;\\ R_3\,, & \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}}\sqrt{\ln f(n)} < a \leqslant 0.5\varrho \ln f(n)\,;\end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11-\delta}}{a}\left(\frac{2^{22}\ln\ln f(n)}{\varrho \ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\mu(a)\left(\frac{2^{12+2\delta}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln f(n)}}{a}\right)}{\varrho\ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_3 = 2^{2+\delta}\mu(a)\exp\left(-\frac{\varrho\sqrt{\ln f(n)}}{2^{20+2\delta}}\right),$$

$$\mu(a) \equiv \begin{cases} 2^{0.5a}\Gamma\left(0.5a+0.5\right)\pi^{-0.5}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!} \quad \text{и} \quad \delta = 0\,; \\ \Gamma\left(0.5a+1\right), & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu! \quad \text{и} \quad \delta = 1\,, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Замечание 1. *Подобного рода утверждение верно и в более общем случае: относительно предельного распределения* $F(x)$ *будем предполагать, что* $F(x)$ *— непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица (существует такая абсолютная постоянная* $L > 0$, *что для любых* x, $y \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство:* $|F(x) - F(y)| \leqslant L|x-y|$).

Приведём несколько примеров применения теоремы 2.
Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 2 из работы [7, с. 63]

Теорема 3. **(Р. Н. Бояринов)** *Для любого* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *существует число* $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $T \geqslant T_1$ *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ *и* $x = T^{0,1\varepsilon}$ *и любых*
$0 < \alpha \leqslant \frac{\ln\ln\ln T}{16\ln B}$ *и* $3(\ln\ln T)(\ln x)^{-1} < h \leqslant (\ln T)^{-0,5}$ *выполняются следующие равенства:*

$$\int_T^{T+H} |S(t)|^\alpha dt = \frac{(\ln\ln T)^{\alpha/2}}{(\pi\sqrt{2})^\alpha} H\left(\upsilon(\alpha) + \theta R_T(\alpha)\right),$$

$$\int_T^{T+H} \left|\int_0^h S(t+u)du\right|^\alpha dt = \frac{\left(h\sqrt{\ln\frac{1}{h}}\right)^\alpha}{(\pi\sqrt{2})^\alpha} H\left(\upsilon(\alpha) + \theta_1 R_T(\alpha)\right),$$

где $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$, $\upsilon(\alpha) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$, $|\theta| \leqslant 1$, $|\theta_1| \leqslant 1$, *а*

$$R_T(\alpha) = \begin{cases} R_1\,, & 0 < \alpha < 30\,; \\ R_2\,, & 30 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{18}\ln B}\,; \\ R_3\,, & \frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{18}\ln B} < \alpha \leqslant \frac{\ln\ln\ln T}{16\ln B}\,; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11}}{\alpha}\left(\frac{2^{25}(\ln B)\ln\ln\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_2 = 2^7 \cdot \upsilon(\alpha)\left(\frac{2^{15}\alpha^2(\ln B)\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2\alpha}\right)}{\ln\ln\ln T}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_3 = 4\cdot\upsilon(\alpha)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{22}\ln B}\right).$$

Замечание 2. *Формулы теоремы 3 с* $H = T^{\varepsilon}$ *и* $x = T^{0{,}05\varepsilon}$ *справедливы для всех* $T \in (X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений, образующих множество* E *с мерой* $\operatorname{mes}(E) < X^{1-0{,}04\varepsilon}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 3 из работы [7, с. 69].

Теорема 4. **(Р. Н. Бояринов)** *Для любого* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *существует число* $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $T \geqslant T_1$ *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ *выполняется следующее неравенство*

$$M(T+H) - M(T) > H(\ln T)\exp\left(-\frac{C(\ln\ln T)\ln\ln\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right),$$

где $C = 2^{41}\ln B$, $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$.

Замечание 3. *Неравенство теоремы 4 с* $H = T^{\varepsilon}$ *справедливо для всех* $T \in (X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений, образующих множество* E *с мерой* $\operatorname{mes}(E) < X^{1-0{,}04\varepsilon}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 3 из работы [9].

Теорема 5. **(Р. Н. Бояринов)** *Для любого* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *существует натуральное число* $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого натурального* $N \geqslant N_1$ *при* $M = \left[N^{\frac{27}{82}+\varepsilon}\right]$ *и любого* $0 < \alpha \leqslant \frac{\ln\ln\ln N}{16\ln A}$ *выполняются следующие равенства:*

$$\sum_{N\leqslant n\leqslant N+M} |\Delta_n|^{\alpha} = \frac{(\ln\ln N)^{\alpha/2}}{(\pi\sqrt{2})^{\alpha}} M\left(\upsilon(\alpha) + \theta R_N(\alpha)\right),$$

где $A = e^{38.4}\varepsilon^{-3}$, $\upsilon(\alpha) = 2^{0.5\alpha}\Gamma\left(0.5\alpha + 0.5\right)\pi^{-0.5}$, $|\theta| \leqslant 1$, *а*

$$R_N(\alpha) = \begin{cases} R_1\,, & 0 < \alpha < 30\,;\\ R_2\,, & 30 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\sqrt{\ln\ln\ln N}}{2^{18}\ln A}\,;\\ R_3\,, & \frac{\sqrt{\ln\ln\ln N}}{2^{18}\ln A} < \alpha \leqslant \frac{\ln\ln\ln N}{16\ln A}\,; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11}}{\alpha}\left(\frac{2^{25}(\ln A)\ln\ln\ln\ln N}{\ln\ln\ln N}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\cdot\upsilon(\alpha)\left(\frac{2^{15}\alpha^2(\ln A)\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln N}}{2\alpha}\right)}{\ln\ln\ln N}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_3 = 4\cdot\upsilon(\alpha)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln N}}{2^{22}\ln A}\right).$$

Замечание 4. *Формулы теоремы* 5 *с* $M = [N^{\varepsilon}]$ *справедливы для всех* $N \in (X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений, образующих множество* E *с мерой* $\operatorname{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Иной подход к исследованию величины $M(T)$ был предложен Дж. Мюллер [10]. Пусть $T > 0$ — достаточно большое число. При каком значении A промежуток $(T - A, T + A]$ будет содержать точку перемены знака функции $S(t)$? Опираясь на гипотезу Римана, Дж. Мюллер доказала, что величину A можно положить равной $c_1 \ln\ln\ln T$, где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная.

Используя идею Дж. Мюллер, М. А. Королев [11] в 2005 г. получил безусловный результат для почти всех T, но ещё с меньшим значением A. Им была доказана следующая теорема.

Теорема 6. **(М. А. Королев).** *Пусть* ε *— сколь угодно малое фиксированное число,* $0 < \varepsilon < 0,001$, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $A = 4,39 \ln\ln\ln\ln T$. *Тогда интервал* $(t - A, t + A)$ *содержит точку перемены знака функции* $S(t)$ *при любом* t, $T \leqslant t \leqslant T + H$, *за исключением значений из множества* E *с мерой* $\operatorname{mes}(E) = O(H(\ln\ln T)^{-0,5})$.

В 2009 г. Р. Н. Бояриновым был получен более лучший результат.

Теорема 7. **(Р. Н. Бояринов)** *Для любого* $0 < \varepsilon < 0,001$ *существует вещественное положительное число* $T_0(\varepsilon)$, *такое, что для любых* $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ *и* $A = 4,39 \ln\ln\ln\ln T$ *интервал* $(t - A, t + A)$ *содержит точку перемены знака функции* $S(t)$ *при любом* t, $T \leqslant t \leqslant T + H$, *за исключением значений из множества* E *с мерой* $\operatorname{mes}(E) = O\left(H(\ln\ln T)^{-1}(\ln\ln\ln T)^{-0,5}\right)$, *постоянная под знаком* O *абсолютная.*

Следующей важной задачей теории дзета-функции Римана является проблема роста функции $S(t)$. Известно, что функция $S(t)$ при $t \to +\infty$ меняет знак бесконечно много раз, но в то же время может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине как положительные, так и отрицательные значения.

В 1946 г. А. Сельберг [3] доказал неравенства

$$\sup_{T \leqslant t \leqslant 2T} (\pm S(t)) > A \frac{(\ln T)^{1/3}}{(\ln\ln T)^{7/3}} \tag{1}$$

в которых A — положительная абсолютная постоянная. Один из возможных путей уточнения этих оценок состоит в замене правых частей неравенств (1) бóльшими величинами.

Так, в 1977 г. Х. Монтгомери [12], пользуясь гипотезой Римана, установил существование на любом промежутке $(T^{1/6}, T)$ точек t_0 и t_1, для которых

$$(-1)^j S(t_j) \geqslant \frac{1}{20} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln\ln T}}, \quad j = 0,\ 1. \tag{2}$$

В 1986 г. К. М. Тсанг [13] усилил результаты А. Сельберга и Х. Монтгомери и получил неравенства

$$\sup_{T\leqslant t\leqslant 2T}(\pm S(t)) > A\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^{a}, \tag{3}$$

в которых $A > 0$ — абсолютная постоянная, а величина a берется равной $1/2$, если гипотеза Римана верна, и равной $1/3$ в противном случае.

Иной путь уточнения неравенств (1) — (3) состоит в замене промежутка $(T, 2T)$, на котором изучаются верхняя и нижняя грани $S(t)$, на более короткий промежуток $(T, T+H)$, $0 < H < T$.

М. А. Королев [14] в 2005 г. доказал следующую теорему

Теорема 8. **(М. А. Королев).** *Пусть $T > T_0 > 0$, $(\ln T)(\ln\ln T)^{-3/2} < H < T$. Если гипотеза Римана верна, то справедливы неравенства*

$$\sup_{T-H\leqslant t\leqslant T+2H}(\pm S(t)) \geqslant \frac{1}{90\pi}\sqrt{\frac{\ln H}{\ln\ln H}}.$$

В 2009 г. Р. Н. Бояринов доказал теорему о больших значениях функции $S(t)$, но при меньших значениях H.

Теорема 9. **(Р. Н. Бояринов)** *Существует абсолютная положительная постоянная T_1 такая, что для любых вещественных чисел $T > T_1$ и $\sqrt{\ln\ln T} \leqslant H \leqslant (\ln T)(\ln\ln T)^{-3/2}$ при справедливости гипотезы Римана будут верны неравенства*

$$\sup_{T-H\leqslant t\leqslant T+2H}(\pm S(t)) \geqslant \frac{1}{900}\frac{\sqrt{\ln H}}{\ln\ln H}.$$

Следующей важной задачей теории дзета-функции Римана является проблема кратных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Определение 3. *Обозначая через $k(\rho)$ кратность нуля ρ, для целого $j \geqslant 1$ величину $N_j(T)$ положим равной числу различных нулей ρ дзета-функции с условием $k(\rho) = j$, ордината которых положительна и не превосходит T.*

Известно, что если точка $T = \gamma$ является ординатой нулей $\rho_1, \ldots, \rho_m$, то при переходе через эту точку функция $N(T)$ совершают скачок на величину, равную сумме кратностей этих нулей: $N(\gamma+0) - N(\gamma-0) = k(\rho_1) + \cdots + k(\rho_m)$.

А. Фуджи [15] в 1975 г. доказал неравенство $N_j(T) \leqslant N(T)\exp(-c\sqrt{j})$, в котором c – положительная абсолютная постоянная, j – достаточно большое целое число, $T > T_0(j) > 0$.

В 2006 г. М. А. Королёв [16] доказал несколько утверждений, уточняющих неравенство Фуджи.

Теорема 10. **(М. А. Королев).** *Пусть* ε *— сколь угодно малое фиксированное число,* $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого целого* $j \geqslant 1$ *имеет место оценка:* $N_j(T+H) - N_j(T) \leqslant e^{7.2}(N(T+H) - N(T))\exp(-\varkappa_0 j)$, *где* $\varkappa_0 = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

Теорема 11. **(М. А. Королев).** *При любом* $j \geqslant 1$ *и* $T > T_0 > 0$ *справедлива оценка*

$$N_j(T) \leqslant c_1 N(T)\exp(-cj), \quad \text{где} \quad c_1 = e^{7.3},\ c = e^{-30.3}.$$

В 2009 г. Р. Н. Бояринов получил качественно новые оценки кратных нулей. Из этих оценок следует, что плотность нулей дзета-функции Римана, кратность которых больше некоторой постоянной j_0, не превосходит 10^{-12}.

Теорема 12. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть* ε *— сколь угодно малое фиксированное число,* $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого целого* $j \geqslant j_0$ *имеет место оценка*

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leqslant \frac{2\varkappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2}(N(T+H) - N(T))\exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = \left(3 + 0.1\varkappa + 2\,(1.5\varepsilon e)^{2/3}\right)/\varkappa$.

Замечание 5. *Неравенство из теоремы* 12 *при* $H = X^{\varepsilon}$ *справедливо для всех* T *из промежутка* $(X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит* $X^{1-0.01\varepsilon}$.

Замечание 6. *При* $H = T^{27/82+\varepsilon}$ *для любого целого* $j \geqslant j_0$ *верно неравенство*

$$\varlimsup_{T\to+\infty} \frac{N_j(T+H) - N_j(T)}{N(T+H) - N(T)} \leqslant \frac{2\varkappa e^{3}}{(1-e^{-3})^2}\exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = \left(3 + 0.1\varkappa + 2\,(1.5\varepsilon e)^{2/3}\right)/\varkappa$.

Теорема 13. **(Р. Н. Бояринов)** *При любом* $j \geqslant \frac{3.1}{\alpha}$ *и* $T > T_0 > 0$ *справедлива оценка*

$$N_j(T) \leqslant \beta N(T)\exp(-\alpha j), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}10^{-5}e^{-19.5}, \quad \beta = \frac{2\alpha e^{3.2}}{(1-e^{-3})^2}.$$

Другой важной задачей теории дзета-функции Римана является изучение распределения расстояния между последовательными нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащими в критической полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$. Количество $N(T)$ таких нулей с условием $0 < \operatorname{Im} s \leqslant T$ выражается следующей формулой Римана–Мангольдта

$$N(T) = L(T) + S(T) + \frac{1}{\pi}\delta(T),$$

где $L(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}$, $S(T)$ – аргумент дзета-функции Римана, а $\delta(T)$ – гладкая функция, производная которой имеет оценку вида: $|\delta'(T)| \ll T^{-2}$.

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат – в произвольном порядке: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \cdots$.

Существует несколько утверждений, указывающих на то, что случаи, когда расстояние между последовательными ординатами велико, встречается достаточно редко.

Далее, если $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, а целое число r удовлетворяет условию $1 \leqslant r \leqslant \lambda^{-1}T\ln T$, то для числа ν_r пар γ_n, γ_{n+r}, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\gamma_{n+r}-\gamma_n}{r} \geqslant \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n,\, \gamma_{n+r} \leqslant 2T$$

А. Фуджи [17] получил следующую оценку:

$$\nu_r \leqslant c_1 N(T)\exp(-c(\lambda r)^{2/3}(\ln\lambda r)^{-1/3}),$$

где c, c_1 – положительные постоянные. Далее, А. Ивич [18] доказал, что количество ординат γ_n с условиями $T < \gamma_n \leqslant T+H$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$, $\gamma_{n+1}-\gamma_n \geqslant \lambda(\ln T)^{-1}$ не превосходит $c_1(N(T+H)-N(T))\exp(-c\lambda)$.

Одним из следствий теоремы А. Фуджи об оценке ν_r явилась верхняя оценка суммы

$$S_k(T) = \sum_{0.5T<\gamma_n\leqslant T}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)^k$$

вида: $S_k(T) \leqslant c(k)\frac{N(T)}{(\ln T)^k}$, $c(k) = (c_1k^{3/2}\ln(k+3))^k$, где k — целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_2(T\ln T)^{2/3}$, а c_1, c_2 — некоторые абсолютные положительные постоянные.

В 1990 г. А. Фуджи [19] улучшил свой результат при $k = 2$, получив более точную оценку:

$$\sum_{0.5T<\gamma_n\leqslant T}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)^2 \leqslant 8.55\frac{2\pi T}{\ln\frac{T}{2\pi}}, \quad T > T_0 > 0.$$

Далее, М. А. Королев в 2007 г. [20] и в 2008 г. [21] опубликовал две работы, в которых уточнял результаты А. Фуджи и А. Ивича. Заметим, что в данных работах М.А. Королева содержится ошибка, заключающаяся в том, что он пользуется ошибочной формулой о числе нулей дзета-функции Римана, лежащих в критической полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}s \leqslant 1$.

В 2009 г. Р. Н. Бояринов устранил ошибку М. А.Королева и получил качественно новые результаты. Из этих результатов следует, что плотность соседних нулей дзета-функции Римана, расстояние между которыми больше $\frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}$, где λ больше некоторой постоянной λ_0, не превосходит 10^{-12}.

Теорема 14. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого $\lambda \geqslant 4\varkappa^{-1}$ для количества $\nu(\lambda; T, H)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geqslant \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n,\, \gamma_{n+1} \leqslant T + H$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T, H) < \frac{e^3}{\lambda}(N(T+H) - N(T)) \exp(-\varkappa\lambda),$$

где $\varkappa = \frac{\pi}{3} e^{-19.5} \varepsilon^{1.5}$.

Замечание 7. *Неравенство из теоремы 14 при $H = X^{\varepsilon}$ справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.01\varepsilon}$.*

Теорема 15. **(Р. Н. Бояринов)** *При любом $\lambda \geqslant 4/\varkappa_1$ и $T > T_0 > 0$ для количества $\nu(\lambda; T)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geqslant \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad 0.5T < \gamma_n \leqslant T$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T) < \frac{e^3}{\lambda} N(T) \exp(-\varkappa_1\lambda), \quad \text{где} \quad \varkappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19.5} \cdot 10^6}.$$

Теорема 16. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть $T \geqslant T_0 > 0$, k – произвольное положительное число, а $S_k(T)$ – сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка:*

$$S_k(T) \leqslant \begin{cases} 4.1 \left(\frac{2\pi}{\varkappa_1 \ln(T/(2\pi))}\right)^k N(T), & 0 < k \leqslant 1; \\ \\ \left(4^k + 2.5e^4\varkappa_1\Gamma(k)\right) \left(\frac{2\pi}{\varkappa_1 \ln(T/(2\pi))}\right)^k N(T), & k > 1; \end{cases}$$

где $\varkappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19.5} \cdot 10^6}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Теорема 17. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть $T \geqslant T_0 > 0$, k – произвольное положительное число, а $S_k(T)$ – сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка:*

$$S_k(T) \geqslant \begin{cases} \frac{1}{34.24} \left(\frac{34.24\pi}{\ln(T/(2\pi))}\right)^k N(T), & 0 < k < 1; \\ \\ 4.1 \left(\frac{\pi}{4.1 \ln(T/(2\pi))}\right)^k N(T), & k \geqslant 1. \end{cases}$$

В 2009 г. Р. Н. Бояринов предложил метод, позволяющий получить оценки скорости сходимости распределений случайных величин и использующий только асимптотические формулы для чётных моментов. Были доказаны следующие утверждения.

Теорема 18. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geqslant 1$ такая, что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N = N(n) \geqslant 3$ такое, что для любых целых чисел $1 \leqslant \nu \leqslant N$ справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \quad |\theta| \leqslant 1,$$

где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство:

$$F_n(a) = F(a) + R_n, \quad \text{где} \quad |R_n| \leqslant 6\left(\frac{134(\ln N + 1)}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2^N} + \frac{3^N}{f(n)}\right),$$

$$F(a) \equiv \begin{cases} 1 - e^{-a^2}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu!\,; \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}\,. \end{cases}$$

Следствие 1. *Если $N = [\varkappa \ln f(n)] + 1$, где $0 < \varkappa \leqslant \frac{1}{\ln 6}$ — некоторая постоянная, то*

$$|R_n| \leqslant \frac{1620 \ln\ln f(n)}{\sqrt{\varkappa \ln f(n)}}.$$

Замечание 8. *Подобного рода утверждение верно и в более общем случае: относительно предельного распределения $F(x)$ будем предполагать, что $F(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица (существует такая абсолютная постоянная $L > 0$, что для любых x, $y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство: $|F(x) - F(y)| \leqslant L|x - y|$).*

Теорема 19. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geqslant 1$ такая, что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N = N(n) \geqslant 3$ такое, что для любых целых чисел $1 \leqslant \nu \leqslant N$ справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \qquad |\theta| \leqslant 1,$$

где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Пусть для $\sigma_{2\nu}$ справедливы неравенства: $0 < \sigma_{2\nu} \leqslant (C\nu)^{\nu(2-\delta)}$, где $C > 1$, $0 < \delta < 2$ — некоторые постоянные.

Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство:

$$F_n(a) = F(a) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant M\left(\frac{224C(\ln N+1)}{N^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{1}{3^N} + \frac{N^{2BN}}{f(n)}\right),$$

где

$$M = \max(2B^2, 6L), \quad B = [4C]+1.$$

Следствие 2. *Если $N = \left[\frac{\varkappa \ln f(n)}{\ln\ln f(n)}\right] + 1$, где $0 < \varkappa \leqslant \frac{1}{8B}$ — некоторая постоянная, то*

$$|R_n| \leqslant \frac{450MC(\ln\ln f(n))^2}{\varkappa(\ln f(n))^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Приведём несколько примеров применения теоремы 18 и её следствия 1.

Справедлива следующая теорема, являющаяся уточнением теоремы 2 из работы [22].

Теорема 20. **(Р. Н. Бояринов)** *Пусть $0 \leqslant \omega \leqslant 1, n$ — натуральное число и u_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{u_{x+1}}{u_x} \geqslant \beta > 1$. Пусть, далее, $S(\omega; n) = \sum\limits_{x \leqslant n} e^{2\pi i \omega u_x}$, где суммирование ведется по натуральным числам x. Тогда найдется натуральное число n_1 такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ для функции распределения $F_n(a)$ величины $\left|\frac{S(\omega;n)}{\sqrt{n}}\right|$ справедливо равенство:*

$$F_n(a) = 1 - e^{-a^2} + R_n, \quad |R_n| \leqslant \frac{4600\sqrt{\ln c_0}\ln\ln n}{\sqrt{\ln n}},$$

где $c_0 = \frac{2\beta}{\beta - 1}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 6 из работы [7, с. 83].

Пусть h — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$3(\ln\ln T)(\ln x)^{-1} < h \leqslant (\ln T)^{-0,5},$$

где $x = T^{0,1\varepsilon}$.

Рассмотрим две измеримые функции

$$\xi(t) = \frac{S(t)\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\ln\ln T}}, \quad \eta(t) = \frac{(S_1(t+h) - S_1(t))\pi\sqrt{2}}{h\sqrt{\ln\frac{1}{h}}}.$$

Пусть $F_T(y) = \mathbb{P}(t : |\xi(t)| < y) = \frac{1}{H}\text{mes}(t : |\xi(t)| < y)$ и $G_T(y) = \mathbb{P}(t : |\eta(t)| < y) = \frac{1}{H}\text{mes}(t : |\eta(t)| < y)$ — функции распределения $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Теорема 21. **(Р. Н. Бояринов)** *Для любого* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *существует число* $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $T \geqslant T_1$ *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ *выполняются следующие равенства:*

$$F_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + R_T,\ |R_T| \leqslant \frac{2^{13}\sqrt{\ln B}\ln\ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln\ln T}};$$

$$G_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + R'_T,\ |R'_T| \leqslant \frac{2^{13}\sqrt{\ln B}\ln\ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln\ln T}},$$

где $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$.

Замечание 9. *Формулы теоремы* 21 *с* $H = T^{\varepsilon}$ *и* $x = T^{0,05\varepsilon}$ *справедливы для всех* $T \in (X, 2X)$, $X \geqslant X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений, образующих множество* E *с мерой* $\mathrm{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Замечание 10. *Используя оценки для нечетных моментов величин* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *можно немного улучшить остаточные члены в асимптотических формулах в теореме* 4 *и получить оценки вида:*
$R_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln\ln T}}\right)$, $R'_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln\ln T}}\right)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Карацуба А. А., Королев М. А. Аргумент дзета-функции Римана // Усп. матем. наук, т. 60, №3(363), с. 41–96 (2005).

[2] Bohr H., Landau E. Beitrage zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion // Math. Ann. 1913. **74**, N1. 3–30.

[3] Selberg A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Arch. Math. Naturvid. 1946.**48**, N5. 89–155.

[4] Ghosh A. On Riemann's Zeta-function — Sign Changes of S(T) // Recent Progress in Analytic Number Theory, **1,** 1981 Academic Press, New York.

[5] Карацуба А. А. О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. **60.** №5. 27 – 56.

[6] Королев М. А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой //Тр. Мат. Ин. В.А.Стеклова. 2002. **239.** 215–238.

[7] Карацуба А. А., Королев М. А. Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой // Усп. мат. наук, 2006, **61**, №3(369), 3-92.

[8] Vaughan R. C., Wooley T. D. On the distribution of generating functions // bull. London Math. Soc., 1998. **30.** 113-122.

[9] Королев М. А. Гипотеза Сельберга о распределении значений мнимых частей нулей дзета-функции Римана // ДАН, 2008, **421**, №3, 308-311.

[10] Mueller J. H. On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$—gaps between sign changes of $S(t)$ // Mathematika. 1983. **29**, N58. 264–269.

[11] Королев М. А. Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, №4. 75–88.

[12] Montgomery H. L. Extreme values of the Riemann zeta-function // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. №4. p. 511-518.

[13] Tsang K. M. Some Ω-theorems for the Riemann zeta-function // Acta Arith. 1986. V. 46. №4. p. 369-395.

[14] Королев М. А. О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках // Изв. РАН. Сер. матем., 69:1 (2005), 115-124.

[15] Fujii A. On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals // Bull.Amer.Math.Soc., **81**:1 (1975), 139–142.

[16] Королев М. А. О кратных нулях дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем., 2006, 70:3, 3–22.

[17] Fujii A. On the difference between r consecutive ordinates of the zeros of the Riemann zeta-function // Proc. Japan Acad., **51**:10 (1975), 741-743.

[18] Ivić A. On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros // Liet. Mat. Rink., **42**:1 (2002), 25-36.

[19] Fujii A. On the gaps between consecutive zeros of the Riemann zeta-function // Proc. Japan Acad. Ser. A Math.Sci., **66**:4 (1990), 97-100.

[20] Королев М. А. О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана // ДАН. Матем. 2007. **417.** №6. 738 – 741.

[21] Королев М. А. О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. **72.** №2. 91 – 104.

[22] Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н. О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи // ДАН, 2001, **379,** №1, 9-11.

Московский государственный универсиет им. М. В. Ломоносова
Получено 23.05.2010