

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мухачева, Э.А.** Модели и методы расчета раскроя-упаковки геометрических объектов [Текст] / Э.А. Мухачева, М.А. Верхотуров, В.В. Мартынов. – Уфа, 1998.
2. **Мухачева, Э.А.** Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двумерной упаковки [Текст] / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева, А.В. Чиглинцев. – М.: Информационные технологии. – 1999. – № 11. – С.13–18.
3. **Мухачева, Э.А.** Задача прямоугольной упаковки: методы локального поиска оптимума на базе блочных структур [Текст] / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева. – М.: Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 10–15.
4. **Monachi, M.** Algorithms for packing and scheduling problems. PhD Thesis [Текст] / M. Monachi. – University of Bologna, 2001.
5. **Житников, В.П.** Задача прямоугольной упаковки в полубесконечную полосу: поиск решения в окрестности локальной нижней границы [Текст] / В.П. Житников, А.С. Филиппова. – М.: Информационные технологии. – 2007. – № 5. – С. 55–62.
6. **Картак, В.М.** Локальный поиск ортогональных упаковок с использованием нижних границ [Текст] / В.М. Картак, М.А. Месягутов, Э.А. Мухачева [и др.]. – М.: Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 6. – С. 167–180.
7. **Hartmann, S.** Project Scheduling under limited resources. Models, methods and applications [Текст] / S. Hartmann. – Springer, Berlin, 1999.
8. **Belov, G.** A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths [Текст] / G. Belov, G. Scheithauer // European Journal of Operational Research. – 2002. – № 141 (2). – P. 274–294.
9. **Bortfeld, A.** A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular prices [Текст] / A. Bortfeld // European Journal of Operational Research. – 2006. – № 172 (3). – P.814–837.

УДК 519.6; 519.17

*А.А. Кочкаров, Л.Х. Хапаева*

## АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА С ЧЕРЕДОВАНИЕМ ЗАТРАВОК

Теория графов – незаменимый инструмент в проектировании сложных систем и синтезе структур. Применение методов и подходов теории графов показали свою результативность в различных областях от медицины и биологии до экономики и менеджмента [1].

Особое внимание стоит обратить на использование методов и подходов теории графов и дискретной математики в моделировании сложных многоэлементных систем. Задачи, которые возникли при исследовании таких систем, как электроэнергетические, социальные и информационные сети, дали существенный толчок для нового этапа развития и применения идей теории графов [2–3].

Интересные и оригинальные результаты были получены при моделировании сложных иерархических систем самоподобными или фрактальными графами [4]. Своим рождением фрактальные (предфрактальные) графы обязаны синтезу идей

синергетики [5] и нелинейной динамики [6], фракталов [10] и теории графов [1].

Термин «сеть» широко распространен в современной научной и бизнес-литературе. На слуху такие выражения, как «розничная или торговая сеть (сеть магазинов)», «сетевой маркетинг», «филиальная сеть», «сеть трубопроводов», «железнодорожная сеть», «социальная сеть», «компьютерная сеть», «информационная сеть», «телефонная сеть» и т. д. Часто этот термин используется для обозначения совершенно различных понятий. В настоящем диссертационном исследовании термин «сеть» понимается, во-первых, как совокупность путей доставки товаров или услуг до конечного получателя, а, во-вторых, как совокупность связей между элементами многоэлементной системы. Системы, в основе функционирования которых лежит сеть, принято называть *сетевыми системами* [8].

На протяжении довольно длительного времени техническая и экономическая науки считали аксиомой стационарность структуры всякой сетевой системы. Под структурой системы понимали совокупность исключительно устойчивых связей между элементами системы. На этом понимании выросли научные школы в области теории графов, дискретной математики, комбинаторной оптимизации и теории систем.

Развивающаяся экономика и глобализационные процессы вынуждают сетевые системы развиваться, адаптировать, оптимизировать свою сетевую структуру под сильно изменчивую конкурентную среду и под новую геополитическую конъюнктуру. В такой ситуации в регулярных изменениях сетевых структур прослеживаются закономерности. Сетевые структуры не только теряют свою стационарность (фиксированность), но и приобретают признаки динамических систем, свойства иерархических и масштабно-инвариантных структур. Процессы изменения, развития, поведения сетевых структур можно объединить общим понятием *структурная динамика*.

Исследования в области структурной динамики ведутся в научных школах профессора В.В. Кульбы [9], члена-корреспондента РАН Д.А. Новикова [10], профессора А.М. Кочкарова [4] в таких научно-исследовательских институтах и ведущих вузах России, как Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН, Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия. Работы школ профессора В.В. Кульбы и члена-корреспондента Д.А. Новикова посвящены, в основном, вопросам взаимодействия между элементами сложных иерархических систем. В работах школы профессора А.М. Кочкарова первичное внимание уделено именно вопросам поведения–развития сетевых структур. В качестве моделей структурной динамики сетевых систем предлагаются различные классы масштабно-инвариантных графов, называемых *предфрактальными*.

Очевидно, что при исследовании сетевых систем необходимо решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сетевой системы, но и задачу распознавания самого процесса развития–изменения структуры сетевой системы. Задачу, объединяющую две указанные, назовем задачей *структурного распознавания*.

Алгоритмы распознавания, строящие решение задачи структурного распознавания, во-первых, устанавливают, что процесс развития сетевых структур соответствует тем или иным правилам порождения предфрактальных графов, а, во-вторых, определяют какие типы затравок при порождении были использованы. В данной статье описан и обоснован алгоритм предфрактального графа, порожденного парой регулярных затравок с чередованием.

**Фрактальные и предфрактальные графы: основные понятия.** В настоящей работе определен особый класс предфрактальных графов: предфрактальный граф, порождаемый множеством затравок с чередованием. Именно он может наиболее адекватно описывать структуры сложных многоэлементных сетевых систем при построении моделей. Поэтому решается задача распознавания предфрактальных графов, порожденных множеством затравок с чередованием. Предложен и обоснован алгоритм распознавания предфрактального графа, порожденного двумя полными затравками с чередованием.

*Предфрактальный граф* будем обозначать через  $G_L = (V_L, E_L)$ , где  $V_L$  – множество вершин графа;  $E_L$  – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе  $l = \{1, 2, \dots, L-1\}$  графе  $G_l$  каждую его вершину связным графом  $H = (W, Q)$ , который будем называть *затравка*. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$  порожден затравкой  $H = (W, Q)$ . Ребра, появившиеся на этапе  $l, l = \overline{1, L}$ , порождения предфрактального графа, будем называть *ребрами ранга  $l$* . *Новыми* ребрами предфрактального графа  $G_L$  назовем ребра ранга  $L$ , а все остальные ребра назовем *старыми*. Процесс построения предфрактального графа, по существу, является процессом построения последовательности предфрактальных графов, которую назовем *траекторией*. *Фрактальный граф* определяется бесконечной траекторией. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа  $G_L$  является такой случай, когда вместо единственной затравки  $H$  используется множество затравок  $\mathbf{H} = \{H_i\} = \{H_1, H_2, \dots, H_p, \dots, H_T\}, T \geq 2$ . Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа  $G_{l-1}$  к графу  $G_l$  каждая вершина замещается некоторой затравкой  $H_i \in \mathbf{H}$ , которая выбирается

случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа  $G_{t-1}$  к графу  $G_t$  каждая вершина графа  $G_{t-1}$  замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой  $H_t \in \mathbf{H}$ , то будем говорить, что *предфрактальный граф  $G_L$  порожден множеством затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ , с чередованием*. Если же при порождении предфрактального графа  $G_L$  множеством затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, T \geq 2$ , с чередованием задано некоторое правило выбора затравок из  $\mathbf{H}$ , например, неубывание числа вершин или ребер выбираемых затравок, то будем говорить, что *предфрактальный граф  $G_L$  порожден множеством затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ , с упорядоченным чередованием*.

Очевидно, что порождение фрактального графа  $G = (V, E)$  (т. е. когда траектория является бесконечным множеством  $G_1, G_2, \dots, G_p, \dots, G_L, G_{L+1}, \dots$ ) с чередованием затравок, возможно только при бесконечном числе замещений затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ .

Если при порождении предфрактального графа с чередованием для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*. Если для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с убыванием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным убыванием затравок*. Использование одной и той же затравки для порождения предфрактального графа чередованием затравок, на различных этапах порождения исключается.

В случае порождения предфрактального графа  $G_L$  с упорядоченным возрастанием (с упорядоченным убыванием) затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ , если  $L > T$ , то переход на  $l = T + 1$  шаге порождения от предфрактального графа  $G_T$  к  $G_{T+1}$  осуществляется заменой всех вершин графа  $G_T$  затравкой с наименьшим (наибольшим) числом вершин из  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ . На последующих шагах  $l = T + 2, T + 3, \dots, L$  порождения предфрактального графа  $G_L$  затравки из  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$ , используются последовательно по очередности возрастания (убывания) числа вершин. В случае порождения предфрактального графа  $G_L$  число этапов порождения больше числа затравок  $L > T$ , целесообразно говорить о периоде

замещения вершин затравками. Период замещения вершин затравками в процессе порождения предфрактального графа  $G_L$  с возрастанием или убыванием вершин затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geq 2$  обозначим через  $P$ .

**Алгоритм распознавания.** Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием, и при сохранении смежности старых ребер.

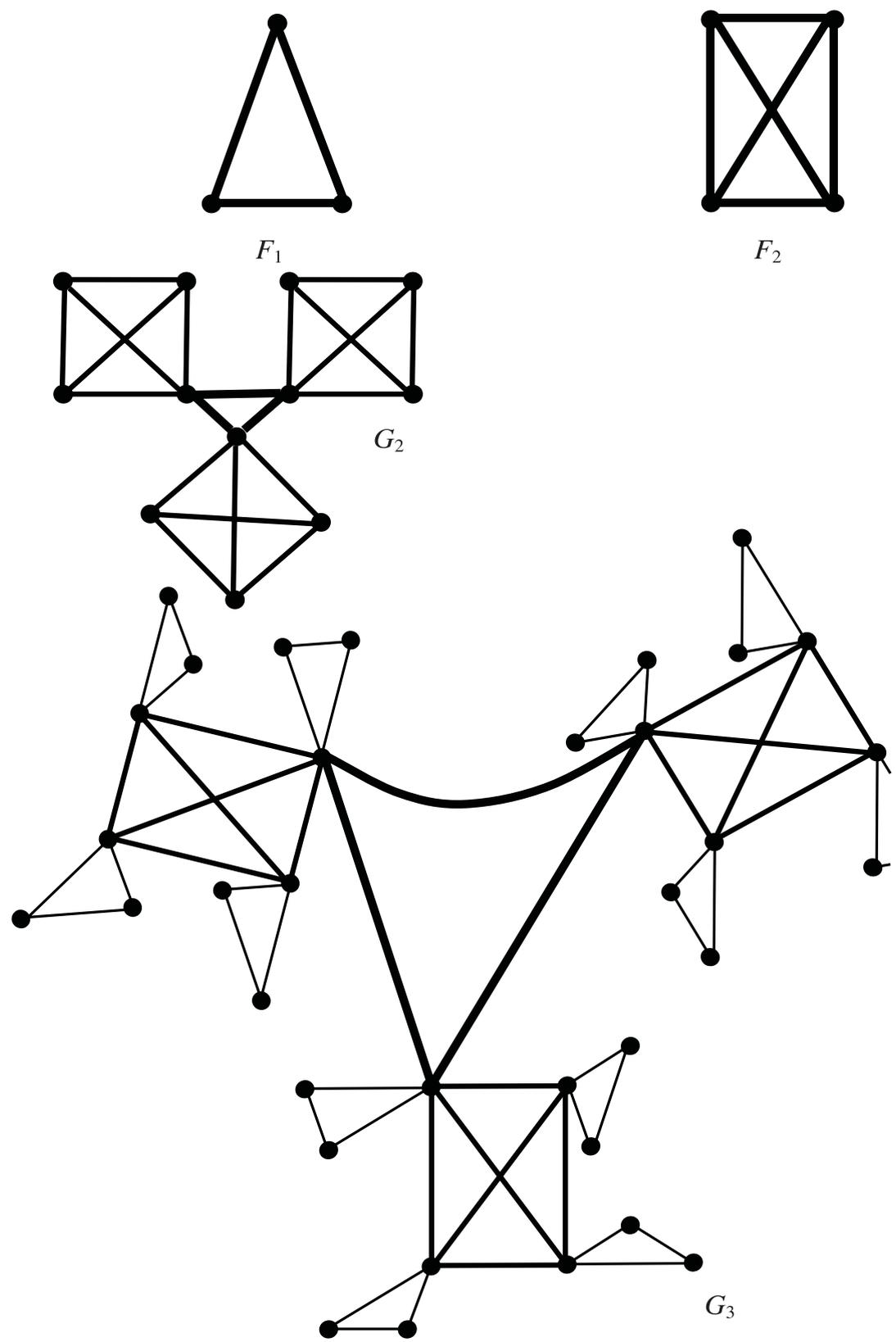
Переход в траектории  $G_1, G_2, \dots, G_p, \dots, G_L$  графа с чередованием затравок от текущего графа  $G_r = (V_r, E_r)$  к следующему графу  $G_{r+1}$  всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$  и  $F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2 (m_1 < m_2)$  соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер можно осуществить алгоритмом  $\beta$ . Суть алгоритма  $\beta$  заключается в идентификации графов  $F_1 = (V_1, E_1)$ ,  $F_2 = (V_2, E_2)$  как затравок предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

На рисунке изображена траектория предфрактального графа  $G_3 = (V_3, E_3)$ , порожденного парой полных затравок – трехвершинным графом  $F_1 = (V_1, E_1)$  и четырехвершинным  $F_2 = (V_2, E_2)$ , с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Алгоритм  $\beta$  состоит из  $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$  этапов. На каждом из этапов алгоритма  $\beta$  выполняются три ключевые операции: окрашивание (выделение) вершины, и – ребра, стягивание ребра, стягивание цепи. На вход первого  $k = 1$  этапа алгоритма предъявляется предназначенный для распознавания граф  $G = (V, E)$ . На вход каждого из этапов  $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$  алгоритма  $\beta$  предъявляется граф  $G^k = (V^k, E^k)$ , как результат работы предыдущего этапа.

Определим число вершин графа  $G = (V, E)$  и обозначим их через  $N$ . Разделим число вершин графа  $G = (V, E)$  на произведение  $m_1 m_2$  последовательно необходимое количество раз, чтобы получить представление  $N = (m_1 m_2)^k r$ . Возможны два случая:  $r = 1, r = m_1$ . Рассмотрим каждый из них подробно. Если остаток  $r$  не удовлетворяет ни одному из указанных вариантов, то алгоритм  $\beta_3$  завершает свою работу с отрицательным результатом.



Траектория предфрактального графа, порожденного парой полных затравок

Пусть  $r = 1$ . Тогда  $G = G^L$ , а число этапов алгоритма  $\beta$  равно  $L = 2K$ . Затем у графа  $G^L$  производим поиск всех вершин степени  $m_2 - 1$  и объединяем их в множество  $V_{m_2}^L$ . Затем полученное множество  $V_{m_2}^L$  разбивается на подмножества с учетом взаимной смежности составляющих его вершин следующим образом. Выделяем вершину  $v \in V_{m_2}^L$  и смежные ей  $(m_2 - 2)$  вершины из множества  $V_{m_2}^L$ . Если вершина  $v \in V_{m_2}^L$  не имеет в множестве  $V_{m_2}^L$  смежных с ней  $(m_2 - 2)$  вершин, то алгоритм  $\beta$  заканчивает свою работу с отрицательным результатом. В процессе разбиения множества  $V_{m_2}^L$  на подмножества, вершины не выделяются более одного раза. После разбиения множества  $V_{m_2}^L$  на подмножества, в каждом подмножестве проводится проверка на взаимную смежность всех ее  $(m_2 - 2)$  вершин. Далее выделяются ребра, обеспечивающие смежность вершин в каждом подмножестве. Их число в каждом из подмножеств равно  $\frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2}$ , в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее проверяем смежность всех  $(m_2 - 1)$  вершин каждого выделенного подмножества с одной вершиной, степень которой больше, чем  $m_2 - 1$ . Если таковая имеется, выделяя ее и все ребра, соединяющие эту вершину с уже выделенными, получим выделенный полный подграф с  $m_2$  вершинами. Такие полные подграфы должны быть выделены на графе  $G^L$  в соответствии с числом подмножеств множества  $V_{m_2}^L$ , в противном случае алгоритм заканчивает свою работу с отрицательным результатом.

Далее стягиваем все выделенные ребра. И на вход следующего этапа алгоритма  $\beta$  передается граф  $G^{L-1}$ . На графе  $G^{L-1}$  выделяем все вершины степени  $m_1 - 1$  и объединяем в множество  $V_{m_1}^{L-1}$ . С множеством  $V_{m_1}^{L-1}$  проделываем те же операции относительно вершин со степенью  $m_1 - 1$ , что и с вершинами множества. Далее стягиваем все выделенные ребра. На вход следующего этапа алгоритма  $\beta$  передается граф  $G^{L-2}$ . На всех последующих этапах проводим операции по стягиванию выделяемых полных подграфов, чередуя число их вершин  $m_1$  и  $m_2$  в продолжении уже начатой последовательности на первых двух шагах. На выходе последнего шага получим полный граф  $G^1$  с числом вершин  $m_1$ , в противном случае алгоритм  $\beta$  завершает свою работу с отрицательным результатом.

Пусть  $r = m_1$ . Тогда  $G = G^L$ , а число этапов алгоритма  $\beta$  равно  $L = 2K + 1$ . Затем на графе  $G^L$  выделяем все вершины степени  $m_1 - 1$ . Далее процесс распознавания графа  $G = G^L$  при  $r = m_1$  идентичен предыдущему случаю, когда  $r = 1$ .

Результатом работы алгоритма  $\beta_3$  в случаях, когда  $r = 1, r = m_1$  является траектория  $G^k = (V^k, E^k) = G_k = (V_k, E_k), k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$ , предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1), F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Не налагая дополнительных ограничений на входные данные с алгоритм  $\beta_3$ , кроме изменения условия  $m_1 < m_2$  на  $m_1 > m_2$ , можно переориентировать алгоритм  $\beta_3$  на распознавание предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1), F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) соответственно, с убыванием и при сохранении смежности старых ребер.

*Теорема 1.* Всякий предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$  и  $F_2 = (V_2, E_2), |V_1| = m_1$  и  $|V_2| = m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер распознается алгоритмом  $\beta$  с полиномиальной трудоемкостью  $O(|E_L| + L|V_L|)$ .

*Доказательство* разделим на две части. В первой будет доказано соответствие выполняемой алгоритмом  $\beta$  работы заявленным целям, т. е. распознаванию предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1), F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер. Во второй будет подсчитана трудоемкость самого алгоритма  $\beta$ .

1. При порождении предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$  и  $F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) соответственно, число вершин самого графа будет равно произведению с чередующимися множителями  $N = m_1 m_2 m_1 m_2 \dots \cdot r$ , где каждый множитель соответствует этапу порождения предфрактального графа. Формула  $N = m_1 m_2 m_1 m_2 \dots \cdot r$  позволяет вычислять число вершин предфрактального графа, порождаемого парой полных затравок с упорядоченным возрастанием. Множитель  $r$ , если число этапов порождения нечетно, равен  $m_1$ . Если число этапов порождения четно, то множитель  $r$

равен 1. Рассмотрим оба случая в отдельности.

Пусть число этапов порождения предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  нечетно, т. е.  $r = m_1$ . Это значит, что при порождении предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  число его вершин будет равно  $N(G_L) = (m_1 m_2)^M m_1$ , а  $L = 2M + 1$ . Кроме того, это значит, что последней затравкой, использованной для замещения вершин предфрактального графа  $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ , является полный  $m_1$ -вершинный граф  $F_1 = (V_1, E_1)$ .

Всякий предфрактальный граф, порождаемый полными затравками с сохранением смежности старых ребер, можно получить склеиванием новых затравок с вершинами предфрактального графа предыдущего этапа. Это следует из общего описания процесса порождения предфрактального графа с сохранением смежности старых ребер. Поэтому только лишь одна вершина каждой новой подграф-затравки предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  будет инцидентна старым ребрам, значит, только степень этой вершины подграф-затравки будет отличаться от  $m_1 - 1$ .

Выделив на предфрактальном графе  $G_L = (V_L, E_L)$  все вершины степени  $m_1 - 1$  и объединив их в множество  $V_{m_1}^L$ , можно сгруппировать их в подмножества, исходя из взаимной смежности выделенных вершин. Эти подмножества представляют собой  $(m_1 - 1)$  смежные вершины каждой новой подграф-затравки предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ . В каждом из сгруппированных подмножеств множества  $V_{m_1}^L$  не достает по одной вершине, чтобы каждое из подмножеств соответствовало множеству вершин отдельно взятой подграф-затравки. Для добавления этих подмножеств последними вершинами достаточно выделить все инцидентные вершинам подмножеств ребра, часть из которых  $(m_1 - 1)$  ребро) окажется инцидентными недостающей вершине.

После выделения все новые ребра стягиваются. На вход следующему этапу порождения подается предфрактальный граф  $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ .

Далее на каждом этапе распознавания проводится, чередуя, выделение и стягивание новых подграф-затравок, соответствующих затравкам  $F_2 = (V_2, E_2)$  и  $F_1 = (V_1, E_1)$ , по аналогии с описанным и обоснованным первым этапом распознавания алгоритма  $\beta$ .

Пусть число этапов порождения предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  четно, т. е.  $r = 1$ . Это значит, что число замещений, учитывая чередующийся характер процесса порождения, вер-

шин затравкой  $F_1 = (V_1, E_1)$  и затравкой  $F_2 = (V_2, E_2)$  будет равным. Поэтому число вершин предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  вычисляется в соответствии с произведением  $N(G_L) = (m_1 m_2)^K$ , а  $L = 2K$ . Кроме того, это значит, что последней затравкой, использованной для замещения вершин предфрактального графа  $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ , является полный  $m_2$ -вершинный граф  $F_2 = (V_2, E_2)$ . Тогда с выделения подграф-затравок, соответствующих затравке  $F_2 = (V_2, E_2)$ , и целесообразно начинать распознавание предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ . Последующие шаги в алгоритме  $\beta$  при  $r = 1$  аналогичны шагам при  $r = m_1$ . Поэтому и обоснование этой части алгоритма аналогично предъявленному выше.

2. На каждом из  $k = 1, 2, \dots, l, \dots, L$  этапов алгоритм  $\beta$  просматривает все вершины графа  $G = (V, E)$  и выделяет соответствующие требованиям текущего этапа. То есть на каждом этапе алгоритма  $\beta$  вершины степени  $m_2 - 1$  и  $m_1 - 1$  соответственно, поочередно объединяются в множества  $V_{m_2}^l$  и  $V_{m_1}^l$ . На каждом шаге алгоритма эти действия соответствуют  $|V_L|$  операциям. На протяжении всего алгоритма эти действия соответствуют  $L|V_L|$  операциям. Кроме того, на протяжении всего алгоритма  $\beta$  каждое ребро графа  $G = (V, E)$  выделяется лишь единожды; общая вычислительная сложность алгоритма  $\beta$  распознавания предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного парой полных затравок  $F_1 = (V_1, E_1)$ ,  $F_2 = (V_2, E_2)$  с числом вершин  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер равна  $O(|E_L| + L|V_L|)$ .

Работа [4] целиком посвящена распознаванию фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных одной затравкой. Вопрос о распознавании фрактальных (предфрактальных) графов, порожденных множеством затравок, оставался открытым до недавнего времени.

В данной статье приведен пример адаптации (изменения правила) процесса порождения предфрактальных графов для моделирования развивающихся сетевых структур. Результатом адаптации стал новый класс предфрактальных графов, порождаемый множеством затравок с чередованием. Как следствие этого, рассмотрена частная задача распознавания предфрактального графа, порожденного парой полных затравок чередованием. Предложенный алгоритм распознавания решает эту задачу за полиномиальное время.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Емеличев, В.А.** Лекции по теории графов [Текст]/В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов [и др.]. – М.: Наука, 1990.
2. **Strogatz, S.** Exploring complex networks [Текст]/S. Strogatz//Nature.–2001.–№ 410.–Р. 268–276.
3. **Krön, B.** Growth of self-similar graphs [Текст]/B. Krön//J. Graph Theory. –2004.–№ 45 (3)–Р. 224–239.
4. **Кочкаров, А.М.** Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход [Текст]/А.М. Кочкаров. –Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
5. **Малинецкий, Г.Г.** Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент [Текст]/Г.Г. Малинецкий. –М.: КомКнига, 2005.
6. **Малинецкий, Г.Г.** Нелинейная динамика и проблема прогноза [Текст]/Г.Г. Малинецкий, С.П. Курдюмов//Вестник РАН.–2001.–Т. 71.–№3. –С. 210–224.
7. **Фракталы в физике** [Текст]/Под ред. Л. Пьетро-норо, Э. Тозатти. –М.: Мир, 1988.
8. **Малашенко, Ю.Е.** Модели неопределенности в многопользовательских сетях [Текст]/Ю.Е. Малашенко, Н.М. Новикова. –М.: Эдиториал УРСС, 1999.
9. **Кульба, В.В.** Управление и контроль реализации социально-экономических целевых программ [Текст]/В.В. Кульба, С.С. Ковалевский, В.А. Уткин [и др.]. –М.: Книж. дом «Либриком», 2009.
10. **Новиков, Д.А.** Сетевые структуры и организационные системы [Текст]/Д.А. Новиков. –М.: ИПУ РАН, 2003.–102 с.

УДК 519.632.4

*А.В. Пашковский*

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И СИЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ СТАНДАРТНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Развитие практически любой отрасли современного производства в значительной мере зависит от степени автоматизации инженерных разработок, гибкости технологий производства и присутствия в них обратной связи по контролю качества продукции. Именно поэтому в одном ряду по важности создания стоят системы диагностики, контроля качества, автоматизированные системы управления технологическими процессами и другие подобные системы. Значительная роль, определяющая качество функционирования систем, принадлежит математическим методам, применяющимся в мониторинге, диагностике и управлении технологическими процессами.

Современные численные методы, такие, как метод конечных элементов (МКЭ), комбинированный метод граничных и конечных элементов (КМГиКЭ) и т. д. позволяют осуществлять разнообразные типы прикладных расчетов. Тем не менее, использование новых технологий и научных разработок в производстве электромехани-

ческих, электромагнитных и тепловых устройств определило целый ряд задач, в которых существующие методы не обеспечивают достаточной точности. В частности, это относится к расчету полей, особенно трехмерных, в устройствах, которые рассматриваются как неоднородные или кусочно-однородные среды (КОС) с нелинейными включениями, узкими порами, тонкими пленками или мелкозернистой структурой. Ситуация усугубится при использовании в проектировании и производстве устройств микро-, микро- и нанотехнологий. Следует отметить, что даже в инженерных и научных задачах средней сложности при наличии нелинейности характеристик материалов, особенностей решения в окрестностях угловых точек сред, тонких включений, осцилляции и неудовлетворительных свойств решений в расчетных средах у вышеперечисленных методов возникают значительные потери точности.

Рассмотрим проблему такого рода на примере расчета магнитного поля и силовых характе-