# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ $\Pi$ – ТЕОРЕМЫ

**Моисеев А.А.,** *к.т.н., с.н.с.,*
*ГосНИИ химмотологии,*
*slow.coach@yandex.ru*

**Ключевые слова:**
*$\pi$ – теорема, алгебраическая интерпретация, единица измерения, критерий подобия, размерность, логарифмические координаты, однородная линейной система, фундаментальное решение, линейное преобразование, ранг матрицы*

## АННОТАЦИЯ

Безразмерные критерии подобия активно используются в исследованиях физических процессов в ситуации недостаточной проработанности теории последних. Наиболее широко они используются в гидро – и термодинамике, хотя находят применение и в других областях, например в физической химии. Существует два основных метода формирования критериев подобия:

- по результатам нормализации точных уравнений процессов;
- по результатам априорного анализа параметров, определяющих протекание процессов с использованием $\varpi$ – теоремы.

Данная разработка посвящена анализу второго подхода с точки зрения его алгебраической интерпретации, которое базируется на формальном определении логарифмических координат размерности. В этом случае степенное представление размерности параметра трансформируется в линейную комбинацию логарифмов единиц измерения. Коэффициенты в этой комбинации естественно интерпретировать как координаты вектора размерности параметра в семимерном пространстве размерностей.

В ситуации, когда процесс определяется рядом параметров, каждому из них сопоставляется вектор его размерности. В совокупности эти векторы образуют матрицу A размерностей. Поскольку безразмерному критерию в логарифмическом представлении, соответствует нулевой вектор, все возможные безразмерные критерии, которые могут быть образованы на базе данного ряда параметров, являются нетривиальными решениями однородной линейной системы с матрицей коэффициентов A. Независимость параметров в этих условиях эквивалентна линейной независимости соответствующих векторов размерностей. При этом максимальное число независимых параметров соответствует рангу матрицы A. Если образовать матрицу C из оставшихся векторов матрицы A после удаления линейно – независимых, ее ранг будет соответствовать числу независимых критериев подобия, которые может быть определен на базе данного ряда параметров.

Эта интерпретация позволяет свести задачу построения системы независимых критериев подобия к построению системы фундаментальных решений однородной линейной системы в логарифмическом представлении. Задача замены единиц измерения в этих условиях сводится к линейному преобразованию логарифмических координат размерности, невырожденному в алгебраическом смысле. Таким образом, алгебраическая интерпретация $\varpi$ – теоремы позволяет уточнить ее смысл, а так же дать регулярное определение независимости параметров, базируясь на понятии линейной независимости векторов размерности.

Безразмерные критерии подобия активно используются в исследованиях физических процессов в ситуации недостаточной проработанности теории последних. Наиболее широко они используются в гидро – и термодинамике, хотя находят применение и в других областях, например в физической химии. Существует два основных метода формирования критериев подобия:

- по результатам нормализации точных уравнений процессов [1, 2];
- по результатам априорного анализа параметров, определяющих протекание процессов с использованием $\pi$ – теоремы [3, 4].

Данная разработка посвящена анализу второго подхода с точки зрения его алгебраической интерпретации, базирующейся на следующих соображениях. В системе СИ определяется следующая совокупность независимых единиц измерения [5]:

- килограмм – M
- метр – L
- секунда – T
- кельвин – Θ
- ампер – I
- кандела – J.

Формально введем логарифмы единиц измерения [4]:

MM = lnM
LL = lnL
TT = lnT
ΘΘ = lnΘ
NN = lnN
II= lnI
JJ = lnJ.

В этом случае степенное представление размерности параметра p трансформируется в линейную комбинацию логарифмов единиц измерения (MM, LL, …, JJ). Коэффициенты в этой комбинации естественно интерпретировать как координаты вектора P размерности параметра в семимерном пространстве размерностей. Предположим, что процесс определяется рядом параметров ($p_1$, $p_2$, …, $p_n$). Сопоставляя каждому параметру вектор его размерности, получаем ряд таких векторов ($P_1$, $P_2$, …, $P_n$). В совокупности эти векторы образуют матрицу A размерности $7\times n$. Безразмерному критерию в логарифмическом представлении, рассмотренном выше, соответствует нулевой столбец. Вследствие этого все безразмерные критерии, которые могут быть образованы на базе данного ряда параметров, являются нетривиальными решениями однородной линейной системы с матрицей коэффициентов A [6].

Независимость параметров в этих условиях эквивалентна линейной независимости соответствующих векторов размерностей. При этом максимальное число r линейно – независимых векторов соответствует рангу матрицы A: r = rgA. Образуем определяющую матрицу B из r линейно независимых векторов, а определяемую матрицу C – из оставшихся векторов матрицы A. Ранг матрицы C соответствует числу k линейно – независимых векторов, образующих фундаментальную систему решений однородной линейной системы. Прочие решения представляют собой их линейные комбинации [6]. В степенном представлении размерностей это соответствует произведению степеней независимых параметров, т.е. зависимым параметрам. Поэтому k = rgC соответствует числу независимых критериев подобия, который может быть определен на базе данного ряда параметров.

Проиллюстрируем проведенное построение на примере формирования физико – химических критериев для жидкостей. Рассмотрим сначала гидростатическую ситуацию, учитывая, что электромагнитные единицы I и фотометрические единицы J не задействованы, и считая, что процессы в жидкости определяются следующим рядом параметров (ρ, μ, c, P, σ, S, T, $E_0$), где:

- $\rho = \dfrac{M}{L^3}$ - плотность жидкости
- $\mu = \dfrac{M}{N}$ - молярная масса жидкости
- $c = \dfrac{L^2}{\Theta T^2}$ - теплоемкость жидкости
- $P = \dfrac{M}{LT^2}$ - давление сжатия
- $\sigma = \dfrac{M}{T^2}$ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости
- $S = L^2$ - площадь свободной поверхности жидкости
- $T = \Theta$ - температура жидкости
- $E_0 = \dfrac{ML^2}{NT^2}$ - энергия активации.

В качестве независимых параметров выберем следующие: (ρ, μ, c, P, σ). Соответствующая определяющая матрица невырождена и имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а определяемая:

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&2\\0&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы С равен 3, т.е. можно определить три независимых критерия подобия, используя каждый из столбцов С в качестве столбца свободных членов в линейной системе с матрицей коэффициентов В. Система уравнений для параметра S имеет вид:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+0+\delta+\varepsilon=0\\-3\alpha+0+2\gamma-\delta+0=2\\0-\beta+0+0+0=0\\0+0-2\gamma-2\delta-2\varepsilon=0\\0+0-\gamma+0+0=0\end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=0,\beta=0,\gamma=0,\delta=-2,\varepsilon=2$.

Отсюда находим для характеристической в смысле [1] площади свободной поверхности $S=\left(\dfrac{\sigma}{P}\right)^2$. Критерий при этом имеет вид $\pi_1=S\left(\dfrac{P}{\sigma}\right)^2$ и выражает отношение поверхностных и объемных напряжений в жидкости.

Система уравнений для T имеет вид:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+0+\delta+\varepsilon=0\\-3\alpha+0+2\gamma-\delta+0=0\\0-\beta+0+0+0=0\\0+0-2\gamma-2\delta-2\varepsilon=0\\0+0-\gamma+0+0=1\end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=-1,\beta=0,\gamma=-1,\delta=1,\varepsilon=0$.

Отсюда находим для характеристической температуры $T=\dfrac{P}{c\rho}$. Критерий при этом имеет вид $\pi_2=\dfrac{c\rho T}{P}$ и выражает отношение роста давления при нагреве к давлению сжатии.

Система уравнений для $E_0$ имеет вид:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+0+\delta+\varepsilon=1\\-3\alpha+0+2\gamma-\delta+0=2\\0-\beta+0+0+0=-1\\0+0-2\gamma-2\delta-2\varepsilon=-2\\0+0-\gamma+0+0=0\end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=-1,\beta=1,\gamma=0,\delta=1,\varepsilon=0$.

Отсюда находим для характеристической энергии активации $E_0=\dfrac{\mu P}{\rho}$. Критерий при этом имеет вид $\pi_3=\dfrac{\mu P}{\rho E_0}$ и характеризует рост скорости реакции при сжатии. Подставляя сюда давление Р, выраженное через характеристическую температуру, получаем $\pi_4=\dfrac{c\mu T}{E_0}$. Последний критерий представляет собой аналог критерия Аррениуса $Arr=\dfrac{RT}{E_0}$ для химической реакции в жидкости и характеризует температурную зависимость ее скорости [7].

Рассмотрим теперь гидродинамическую ситуацию, считая, что процессы в жидкости определяются следующим рядом параметров (ρ, μ, c, u, ν, P, T, $E_0$), где:

- $u=\dfrac{L}{T}$ - скорость течения жидкости
- $\nu=\dfrac{L^2}{T}$ - кинематическая вязкость жидкости.

В качестве независимых параметров выберем следующие: (ρ, μ, c, u, ν). Соответствующая определяющая матрица невырождена и имеет вид:

$$B=\begin{matrix}1&1&0&0&0\\-3&0&2&1&2\\0&0&-2&-1&-1\\0&0&-1&0&0\\0&-1&0&0&0\end{matrix}$$

а определяемая:

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&2\\-2&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы С равен 3, т.е. можно определить три независимых критерия подобия, используя каждый из столбцов С в качестве столбца свободных членов в линейной системе с матрицей коэффициентов В. Система уравнений для параметра Р имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+0+0+0=1 \\ -3\alpha+0+2\gamma+\delta+2\varepsilon=-1 \\ 0+0-2\gamma-\delta-\varepsilon=-2 \\ 0+0-\gamma-0-0=0 \\ 0-\beta+0+0+0=0 \end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=1, \beta=0, \gamma=0, \delta=2, \varepsilon=0$.

Отсюда находим для характеристического давления $P=\rho u^2$. Критерий при этом представляет собой число Эйлера [3, 4] $\pi_2=\dfrac{P}{\rho u^2}$ и выражает отношение статического давления и скоростного напора.

Система уравнений для параметра Т имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+0+0+0=0 \\ -3\alpha+0+2\gamma+\delta+2\varepsilon=0 \\ 0+0-2\gamma-\delta-\varepsilon=0 \\ 0+0-\gamma-0-0=1 \\ 0-\beta+0+0+0=0 \end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=0, \beta=0, \gamma=-1, \delta=2, \varepsilon=0$.

Отсюда находим для характеристической температуры $T=\dfrac{u^2}{c}$. Критерий при этом представляет собой число Маха $\pi_3=\dfrac{u}{\sqrt{cT}}$ и имеет смысл отношения скорости течения к скорости звука [4].

Система уравнений для параметра $E_0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+0+0+0=1 \\ -3\alpha+0+2\gamma+\delta+2\varepsilon=2 \\ 0+0-2\gamma-\delta-\varepsilon=-2 \\ 0+0-\gamma-0-0=0 \\ 0-\beta+0+0+0=-1 \end{cases}$$

Решая ее, получаем:
$\alpha=0, \beta=1, \gamma=0, \delta=2, \varepsilon=0$.

Отсюда находим для характеристической энергии активации $E_0=\mu u^2$. Критерий при этом имеет вид $\pi_3=\dfrac{\mu u^2}{E_0}$ и имеет смысл отношения энергии торможения к энергии активации [8].

Проведенное рассмотрение показывает, что алгебраическая интерпретация $\pi$ – теоремы позволяет уточнить ее смысл, а так же дать регулярное определение независимости параметров, базируясь на понятии линейной независимости векторов размерности. Задача замены единиц измерения в этих условиях сводится к линейному преобразованию координат размерности, невырожденному в алгебраическом смысле.

**Литература**

1. Моисеев А.А., Применение теории подобия в имитационном моделировании динамических процессов// Приборы и системы, №10, 2004, с. 1.
2. Седов Л.И. Методы теории подобия и размерности в механике., М., «Наука», 1965, 388 с.
3. Гухман А.А., Введение в теорию подобия, М., Высшая школа, 1973, 296 с.
4. Веников В.А. Теория подобия и моделирования, М., Высшая школа, 1976, 479 с.
5. Сена Л.А., Единицы физических величин и их размерности, М., Наука, 1988, 432 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971,432 с.
7. Эммануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики, М., Высшая школа, 1962, 415 с.
8. Стернин Л.Е. Основы газовой динамики, М., МАИ, 1995, 336 с.
9. Буренин А.Н., Легков К.Е. Эффективные методы управления потоками в защищенных инфокоммуникационных сетях // H&ES: Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2010. –№ 2. – С. 29-34.
10. Буренин А.Н., Легков К.Е. К вопросу моделирования организации информационной управляющей сети для системы управления современными инфокоммуникационными сетями // H&ES: Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2011. –№ 1. – С. 22-25.
11. Буренин А.Н., Легков К.Е. Модели процессов мониторинга при обеспечении оперативного контроля эксплуатации инфокоммуникационных сетей специального назначения // H&ES: Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2011. –№ 2. – С. 19-23.
12. Буренин А.Н., Легков К.Е. Особенности архитектур, функционирования, мониторинга и управления полевыми компонентами современных инфокоммуникационных сетей специального назначения // H&ES: Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2013. –№3. – С. 20–25.

## Π – THEOREM ALGEBRAIC INTERPRETATION

**Moiseev A.,** PhD,
National Research Institute of Chemmotology, slow.coach@yandex.ru

**Abstract**
Dimensionless similarity criteria used for physical processes study when their theory isn't worked over. Most frequently they used in hydro – and thermodynamics but also can be used in others areas – mechanics, physical chemistry etc. There are two base methods of such criteria forming – at processes equations normalization and on result of a priory analysis of process parameters, using ϖ – theorem. This development devoted to second approach analysis from the point of view of ϖ – theorem algebraic interpretation based on formal definition of logarithmical units. In this case power parameter representation converted into linear combination of units logarithms. Coefficients in this combination can be interpreted as coordinates in seven-dimensional space. When process defined by parameters set every parameter has correspondent dimension vector. These vectors form dimension matrix A. Since dimensionless criterion correspond to zero vector, every such criterion is nontrivial solution of uniform linear system with coefficients matrix A. Parameters independence corresponds in this situation to linear independence of correspondent dimension vectors. Maximal number of such vector equals to matrix A rank. If we form matrix C by means of independent vectors removing, its rank will correspond to number of independent similarity criteria, which can be formed on the base these parameters. This operation allows transforming the problem of independent criteria building to base solution forming for uniform linear system in logarithmical representation. So, algebraic ϖ – theorem interpretation allows to precise its meaning and to give the regular definition of criteria independence basing on linear independency idea. Units change converted in this case to nonsingular linear transformation of units logarithms.

**Keywords:** π – theorem, algebraic interpretation, unit, dimension, similarity criteria, logarithmical coordinates, uniform linear system, base solution, linear transformation, matrix rank

**References**
1. Moiseev A., Primenenie teorii podobiya v imitatsionnom modelirovanii dinamicheskich processov [Similarity theory application in dynamical processes simulation] // Pribory i sistemy [Devices and systems], №10, 2004, P. 1.
2. Sedov L.I. Metody podobiya i razmernosti v mechanike [Similarity methods and dimensions analysis in mechanics], M., publishing house "Nauka" ["Science"], 1965, 388 P.
3. Guchman A.A. Vvedenie v teoriyu podobiya, M., publisher house "Vysshaya shkola" ["High scool"], 1973, 296 P.
4. Venikov V.A. Teoriya podobiya i modelirovaniya [Similarity and modeling theory], M., publisher house "Vysshaya shkola" ["High scool"], 1976, 479 P.
5. Sena L.A. Edinitsy fizicheskich velichin i ich razmernosti [Physical values and their units], M., publishing house "Nauka" ["Science"], 1988, 432 P.
6. Kurosh A.G. Kurs vysshey algebry [Course of high-level algebra], M., publishing house "Nauka" ["Science"], 1988, 432 P.
7. Emmanuel N.M., Knorre D.G. Kurs chimicheskoy kinetiki [Course of chemical kinetics], M., publisher house "Vysshaya shkola" ["High scool"], 1962, 415 P.
8. Sternin L.E. Osnovy gazovoy dinamiki [Fundamentals of gas dynamics]. Moscow: publishing house «MAI», 1995. 336 P.
9. Burenin A.N., Legkov K.E. Effective methods of control over streams in protected infokommunikatsionny networks /H&ES: High technologies in space researches of Earth. - 2010.-№ 2. - pp. 29-34.
10. Burenin A.N., Legkov K.E. To a question of modeling of the organization of the information managing director of a network for a control system of modern infokommunikatsionny networks /H&ES: High technologies in space researches of Earth. - 2011.-№ 1. - pp. 22-25.
11. Burenin A.N., Legkov K.E. Model of monitoring processes when ensuring operative control of operation of infokommunikatsionny networks of special purpose /H&ES: High technologies in space researches of Earth. - 2011.-№ 2. - pp. 19-23.
12. Burenin A.N., Legkov K.E. Feature of architecture, functioning, monitoring and management of field components of modern infokommunikatsionny networks of special purpose /H&ES: High technologies in space researches of Earth. - 2013.-№ 3. - pp. 20–25.