Поэтому, если $B_{i_2 \ldots i_p} = 0$ и при этом $A_{ki_2 \ldots i_p} + C_{ki_2 \ldots i_p} = 0$, то условия касания (2.10) формы ω будут выполняться автоматически.

Докажем теперь, что касательная составляющая *p*-формы ω с компонентами

$$\omega_{a_1 \ldots a_p} = \omega_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1}_{a_1} \ldots x^{i_p}_{a_p} = A_{kji_1 \ldots i_p} x^k x^j x^{i_1}_{a_1} \ldots x^{i_p}_{a_p} - A_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1}_{a_1} \ldots x^{i_p}_{a_p}$$

конформно киллингова *p*-форма на S^{n-1}. Для этого нетрудно проверить, что согласно (2.9) и (2.10) выполняются следующие равенства:

$$\nabla_c \omega_{ba_2 \ldots a_p} + \nabla_b \omega_{ca_2 \ldots a_p} = 2 g_{cb} \theta_{a_2 \ldots a_p} - \sum_{\alpha=2}^{p} (-1)^{\alpha} \left(g_{ca_\alpha} \theta_{ba_2 \ldots a_{\alpha-1} a_{\alpha+1} \ldots a_p} + g_{ba_\alpha} \theta_{ca_2 \ldots a_{\alpha-1} a_{\alpha+1} \ldots a_p} \right),$$

где $\theta_{a_2 \ldots a_p} = A_{ki_2 \ldots i_p} x^k x^{i_2}_{a_2} \ldots x^{i_p}_{a_p}$, которые и доказывают требуемое.

Список литературы

1. *Степанов С.Е.* Техника Бохнера для *m*-мерного компактного многообразия с *SL*(*m*, **R**) – структурой // Алгебра и анализ. 1998. Т.10. №4. С. 192-209.
2. *Крамер Д. и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
3. *Kashiwada T.* On conformal killing tensor // Natural Science Report, Ochanomizi University. 1968. Vol.19. № 2. P. 67-74.
4. *Stepanov S.E.* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // Journal of Geometry and Physics. 2000. Vol.33, № 3-4. P.191-209.
5. *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. Marcel Dekker, New York, 1970.

M. Isaev, S.E. Stepanov

INSTANCES OF KILLING AND CONFORMAL KILLING FORMS

Expressions of Killing form in the affine space and conformal Killing form in the Euclidean space are found. The instances of such form, given on the hypersphere globally, are listed.

УДК 514.75

И.Е. Лисицына

(Балтийский военно-морской институт)

АФФИННЫЕ НОРМАЛИ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m

Выясняются аналитические признаки и геометрическая интерпретация: 1) аффинных нормалей, порождаемых сопряженными распределениями Δ и Δ^*, заданными на базисной поверхности V_m гиперполосы SH_m [1]; 2) совпадения построенных аффинных нормалей; 3) совпадения аффинной нормали гиперполосы SH_m, порождаемой распределением Δ, с проективной нормалью Фосса [1].

В данной работе индексы принимают следующие значения:

$$p, q, s, t=\overline{1,r};\ a, b, c, d=\overline{r+1,m};\ \alpha, \beta, \gamma=\overline{m+1,n-1};$$
$$\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma=\overline{m+1,n};\ i, j, k, l=\overline{1,m};\ u, v, w=\overline{r+1,n-1};\ I, L, K=\overline{1,n}.$$

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n со структурными уравнениями

$$D\omega^I=\omega^L\wedge\omega_L^I,\quad D\omega_I^K=\omega_I^L\wedge\omega_L^K, \tag{1}$$

отнесенное к подвижному реперу $\{A,\vec e_I\}$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются дифференциальными уравнениями

$$dA=\omega^I\vec e_I,\quad d\vec e_I=\omega_I^K\vec e_K. \tag{2}$$

Известно [1], что гиперполоса H_m, базисная поверхности которой несет двухкомпонентную сопряженную систему $S(\Delta, \Delta^*)$, определяется уравнениями (без соответствующих замыканий):

$$\begin{gathered}\omega_\alpha^n=0,\ \omega^\alpha=0,\ \omega^n=0,\ \omega_p^{\hat\alpha}=\Lambda_{pq}^{\hat\alpha}\omega^q,\ \omega_a^{\hat\alpha}=\Lambda_{ab}^{\hat\alpha}\omega^b,\\ \omega_p^a=R_{pi}^a\omega^i,\ \omega_a^p=S_{ai}^p\omega^i,\ \omega_\alpha^a=l_{\alpha i}^a\omega^a,\ \omega_\alpha^p=l_{\alpha i}^p\omega^i.\end{gathered} \tag{3}$$

Приведем дифференциальные уравнения функций из (3), которые нам потребуются в дальнейшем [1]:

(4)

Для невырожденных тензоров Λ_{pq}^n и Λ_{ab}^n введем обратные им тензоры Λ_n^{pq} и Λ_n^{ab}:

(5)

Продолжая (4а) и учитывая (1), (3), (4), находим дифференциальные уравнения на функции Λ_{pqi}^n, Λ_{abi}^n:

(6)

В силу сопряженности распределений Δ и Δ^* имеем

$$\Lambda^n_{pa} = 0, \quad \Lambda^n_{ap} = 0. \tag{7}$$

Тензор Λ^n_{ij} имеет строение: $\left\| \Lambda^n_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Lambda^n_{pq} & 0 \\ 0 & \Lambda^n_{ab} \end{matrix} \right\|$ и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \Lambda^n_{ij} = \Lambda^n_{ijk} \omega^k, \tag{8}$$

$$\nabla \Lambda^n_{ijk} = \Lambda^n_{(ij} \Lambda^n_{k)l} \omega^l_n + \Lambda^n_{ijkl} \omega^l. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение квазитензоры

(10)

удовлетворяющие в силу (3) – (10) уравнениям

(11)

2. Прежде всего отметим, что к гиперполосе SH_m внутренним образом присоединяется нормаль Бляшке $B_{n-m} = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{B}_n \right]$ [2], где

$$\vec{B}_n = \vec{e}_n + B^k_n \vec{e}_k + \Lambda^\alpha_n \vec{e}_\alpha, \quad \nabla_\delta \vec{B}_n = \pi^n_n \vec{B}_n, \tag{12}$$

и прямая Бляшке $B_1 = \left[A, \vec{B}_n \right]$. Нормаль Бляшке $B_{n\text{-}m}$ и прямая Бляшке B_1 не зависят от распределений Δ и Δ^* на поверхности V_m и определяются лишь самой гиперполосой SH_m.

Рассмотрим прямую $\left[A, \vec{A}_n \right]$, где

$$\vec{A}_n = \vec{e}_n + b^p_n \vec{e}_p + b^a_n \vec{e}_a + \Lambda^\alpha_n \vec{e}_\alpha. \tag{13}$$

Учитывая (2), (11), убеждаемся, что $\delta \vec{A}_n = \pi^n_n \vec{A}_n$. Таким образом, прямая $A_1 = \left[A, \vec{A}_n \right]$ есть инвариантная прямая, внутренним образом присоединенная к SH_m во второй дифференциальной окрестности. Прямую A_1 назовем *аффинной прямой Δ-распределения*. Соответственно плоскость $A_{n-r} = \left[A, \vec{e}_a, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n\right]$ назовем *аффинной нормалью Δ-распределения*, а плоскость $A_{n-m} = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n\right]$ – *Δ-виртуальной аффинной нормалью гиперполосы SH_m*. Геометрическую интерпретацию прямой A_1 Δ-распределения выясняет

Теорема 1. *Прямая A_1 является диаметром параболоида [1]*

$$\Lambda^n_{pq}x^p x^q + \Lambda^n_{ab}x^a x^b + L^n_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2t_a x^a x^n + T_0\left(x^n\right)^2 + 2l_\alpha x^\alpha x^n = 2x^n, \qquad (14)$$

в поляритете относительно которого в каждой точке $A \in V_m$ ребру Грина G_{m-1} [1]:

$$x^\alpha = x^n = 0, 1 + x^p R_p + x^a S_a = 0, R_p \overset{def}{=} \tfrac{1}{s}R^a_{pa}, S_a \overset{def}{=} \tfrac{1}{r}S^p_{ap} \qquad (15)$$

соответствует нормаль Фосса $\Phi_{n-m} = \left[A, \vec{e}_\alpha, \Phi_n\right]$, где

$$\vec{\Phi}_n = \vec{e}_n + \Lambda^\alpha_n \vec{e}_\alpha + R^a_n \vec{e}_a + S^p_n \vec{e}_p, R^a_n = \tfrac{1}{r}\Lambda^{pq}_n R^a_{pq}, S^p_n = \tfrac{1}{s}\Lambda^{ab}_n S^p_{ab}. \qquad (16)$$

Доказательство. Находим центр параболоида

(17)

Из (17) следует, что диаметр параболоида (14) задается уравнениями

$$x^p = -t_q \Lambda^{qp}_n x^n = b^p_n x^n,\ x^a = -t_b \Lambda^{ba}_n x^n = b^a_n x^n,\ x^\alpha = -l_\beta L^{\beta\alpha}_n x^n = \Lambda^\alpha_n x^n, \qquad (18)$$

т.е. это прямая, которая в силу (13) совпадает с аффинной прямой A_1 Δ-распределения.

Теорема 2. *Δ-виртуальная аффинная нормаль $A_{n-m}(A)$ гиперполосы SH_m совпадает с нормалью Фосса $\Phi_{n-m}(A)$ тогда и только тогда, когда ребро Грина $G_{m-1}(A)$ является несобственной плоскостью.*

Доказательство. С учетом соотношений (15), (16) квазитензоры b^p_n и b^a_n представим в виде

$$b^p_n = R_q \Lambda^{pq}_n + S^p_n, \quad b^a_n = S_b \Lambda^{ba}_n + R^a_n. \qquad (19)$$

Ребро Грина $G_{m-1}(A)$, как следует из (15), является несобственной плоскостью тогда и только тогда, когда

$$R_p = 0,\ S_a = 0. \qquad (20)$$

Имеем

$$\Phi_{n-r}(A) \equiv A_{n-r}(A) \Leftrightarrow \vec{A}_n = \vec{\Phi}_n \Leftrightarrow \left(R_n^a = b_n^a,\ S_n^p = b_n^p\right). \qquad (21)$$

Условия (21) согласно (19) равносильны условиям (20), что и требовалось доказать.

Следствие. Соотношения (21), в силу строения этих квазитензоров, приводят к еще двум аналитическим эквивалентным признакам совпадения нормалей $A_{n-m}(A)$ и $\Phi_{n-m}(A)$:

$$R_{qt}^a = -\Lambda_{qtb}^n \Lambda_n^{ba}, \quad S_{cd}^p = -\Lambda_{cdq}^n \Lambda_n^{qp}; \qquad (22)$$

$$R_{qt}^a \Lambda_{ac}^n = -\Lambda_{qtc}^n, \quad S_{cd}^p \Lambda_{pt}^n = -\Lambda_{cdt}^n. \qquad (23)$$

3. Согласно теореме Трэнсона [3] для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1}^r (r+1)-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Lambda(A)$, лежат в (n-r)-мерной плоскости $T_{n-r}(A) = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_a, \vec{e}_n + T_n^p \vec{e}_p\right]$ – нормали Трэнсона Δ-распределения. Аналогично, нормалью Трэнсона Δ*=распределения на гиперполосе SH_m является (n-s)-мерная плоскость $T_{n-s}(A) = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_p, \vec{e}_n + T_n^a \vec{e}_a\right]$.

Определение. Нормалью Трэнсона гиперполосы SH_m назовем (n-m)-плоскость $T_{n-m}(A)=T_{n-r}(A)\cap T_{n-s}(A)$ – плоскость пересечения нормалей Трэнсона распределений Δ и Δ*. Прямую $T_1(A) = \left[A, \vec{T}_n\right]$, где

, назовем прямой Трэнсона гиперполосы SH_m.

Из определения вытекает строение нормали Трэнсона гиперполосы SH_m:

.

Выясним теперь условия совпадения аффинных нормалей гиперполосы SH_m.

Теорема 3. *Нормаль Трэнсона $T_{n-m}(A)$ гиперполосы SH_m совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$ тогда и только тогда, когда*

$$(m-r)\Lambda_n^{st}\Lambda_{stp}^n = (r+2)\Lambda_n^{bd}\Lambda_{bdp}^n,\ r\Lambda_n^{ab}\Lambda_{abc}^n = (m-r+2)\Lambda_n^{pq}\Lambda_{pqc}^n. \qquad (24)$$

Доказательство. В силу соотношений (10) получаем

(25)

Из (25) и следуют соотношения (24).

Теорема 4. *Δ-виртуальная аффинная нормаль* $A_{n-m} = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n\right]$ *гиперполосы* SH_m *совпадает с нормалью Бляшке* $B_{n-m}(A)$ *тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (24).*

Доказательство. В самом деле, с учетом соотношений (10) имеем

(26)

Из (26) и получаем условия (24).

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5. *Если для некоторого распределения Δ на гиперполосе* SH_m *справедливо одно из следующих условий: а) нормаль Трэнсона гиперполосы совпадает с нормалью Бляшке; b) Δ-виртуальная аффинная нормаль гиперполосы совпадает с нормалью Бляшке; с) Δ-виртуальная аффинная нормаль гиперполосы совпадает с нормалью Трэнсона, то справедливы и все три.*

Список литературы

1. *Лисицына И.Е.* Распределения на регулярной гиперполосе аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №. 30. С. 43 – 49.

2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства / Деп. в ВИНИТИ РАН. № 3342-В98. 105 с.

3. *Лисицына И.Е.* Нормализация Трэнсона гиперполосы H_m аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. №. 29. С. 38 – 40.

E. Lisitsyna

AFFINE NORMALS OF HIPERSTRIP SH_m

We find out analytic sings and geometric interpretation of: 1) affine normals, generated by adjoint distribution Δ and Δ* on base surface of the hyperstrip SH_m; 2) coinsidence of constructed affine normals; 3) coinsidence of affine normal, generated by distribution Δ, with projective normal of Foss.

УДК 514.76

В.И. Макеев

(Пензенский государственный педагогический университет)

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИИ