

АЭРОДИНАМИКА ВИСЯЧИХ МОСТОВ

Чемодуров В. Т.¹, Кузьменко О.А.².

Академия строительства и архитектуры (структурное подразделение)

ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»,

295493 РК г. Симферополь, у. Киевская, 181

e-mail: chens_mu1@mail.ru; olya.kuzy@mail.ru

Аннотация. В последнее время широкое применение в практике приходится на проектирование мостов висячей конструкции, как наименее затратных. Однако стремление к облегчению конструкции приводит к росту чувствительности таких мостов к воздушному потоку в период сильных ветров. Возникающие при этом аэродинамические нагрузки оказывают влияние на прочностные характеристики пролетов таких мостов. Определение критического соответствия устойчивости пролетов висячих мостов к аэродинамическим нагрузкам является актуальной задачей при предварительном проектировании сооружений данного типа. Таким образом, целью данной статьи является определение зон динамической устойчивости пролетов висячего моста, которые зависят от скорости набегающего потока воздуха. В качестве модели пролета висячего моста используется плоская пластина. Для определения положения пластины в любой момент времени используются уравнения Лангранжа второго рода. В работе используется одномерный подход к построению зон устойчивости пластины к ветровой нагрузке при постоянной толщине. Критерием задачи является критическое отношение длины полотна пролета к его ширине. Далее приводится метод нахождения функциональной связи критических параметров полотна от двух переменных: толщины полотна и скорости потока воздуха. Данный метод опирается на правила рототабельного планирования экспериментов.

Ключевые слова: висячие мосты, аэродинамика, устойчивость, крутильные колебания, изгибные колебания, рототабельное планирование.

ВВЕДЕНИЕ

Висячие мосты находят широкое применение в настоящее время, так как обладают определенными преимуществами перед мостами других видов. Главное достоинство данного вида мостов заключается в минимальном расходовании ресурсов на их создание при довольно больших пролетах между опорами. Также их преимущество состоит в том, что пролеты моста могут быть сооружены на достаточно большой высоте, что имеет важное значение для перекрытия судоходных фарватеров и прохода судов любого водоизмещения.

Несмотря на перечисленные преимущества висячие мосты обладают существенными недостатками – могут изгибаться под действием ветровой нагрузки. Поэтому требуется обязательный анализ и расчет реакции пролетов висячего моста на его изгибные и крутильные колебания.

При штормовых погодных условиях движение по таким мостам становится опасным. Особенно прогибы висячего моста при аэродинамических нагрузках оказывают влияние на движение железнодорожного транспорта.

Таким образом, исследование влияния аэродинамических нагрузок на динамическую устойчивость пролетов висячих мостов, несомненно, актуальное. Динамическая устойчивость пролетов висячих мостов зависит от их геометрических характеристик (в плане). В этом случае достаточно определить критическую величину отношения длины пролета (L_x) к его ширине (L_y) при заданной скорости ветра, чтобы иметь начальные условия для его проектирования.

Данная статья направлена на выявление зон динамической устойчивости пролетов висячего моста в зависимости от скорости набегающего потока воздуха. Для наглядности исследования представим пролет висячего моста его моделью в виде плоской пластины, с приведенной толщиной h и жестким креплением на концах (рис.1).

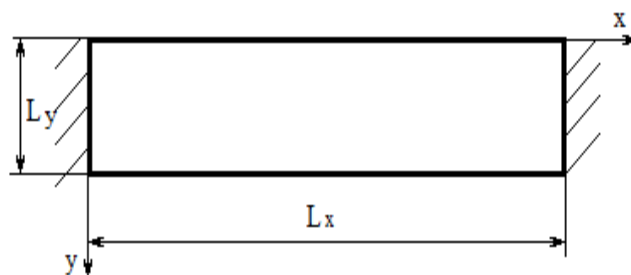


Рис. 1. Модель пролета висячего моста

Fig. 1. The model of span of a suspension bridge

Введем обозначения для прогиба оси жесткости $w(x, t)$, характеризующая изгибные колебания и угла закручивания $\theta(x, t)$, характеризующая крутильные колебания.

Обе указанные характеристики можно представить в виде произведений двух независимых функций

$$\left. \begin{aligned} w(x, t) &= q_1(t) \cdot f(x), \\ \theta(x, t) &= \varphi(x). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $q_1(t)$ – перемещение точки на оси x во времени, для которой форма колебаний $f(x) = 1$; $q_2(t)$ – угол колебания сечения пластины во времени, для которого форма $\varphi(x) = 1$. Для симметричной однородной пластины эта точка находится в ее центре $x = L_x/2$, $y = L_y/2$. Таким образом, положение пластины в любой момент времени можно описать двумя уравнениями свободных колебаний пластины. Для этого воспользуемся уравнениями Лангранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Кинетическая и потенциальная энергии для системы с двумя степенями свободы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Как правило, в пролетах висячих мостов линия центров жесткости и линия центров тяжести совпадают. В этом случае исчезают центральные члены в формулах (3). Оставшиеся коэффициенты имеют следующий вид

$a_{11} = \int_0^L m_0 [f(x)]^2 dx$ – приведенная масса чисто изгибных колебаний.

$a_{22} = \int_0^L J_m [\varphi(x)]^2 dx$ – приведенная масса чисто крутильных колебаний.

$c_{11} = \int_0^L EJ [f''(x)]^2 dx$ – приведенная жесткость чисто изгибных колебаний.

$c_{22} = \int_0^L GJ_p [\varphi'(x)]^2 dx$ – приведенная жесткость чисто крутильных колебаний.

В приведенные формулы входят следующие физические величины: m_0 – погонная масса пластины; $J_m = m_0 L_y^2 / 12$ – погонный массовый

момент инерции; E, G – модули упругости первого и второго рода; $J_p = h L_y^3 / 12$ – полярный момент сечения.

После подстановки уравнений (3) в выражение (2) (с учетом сделанного выше допущения), получим систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 &= Q_1(t), \\ a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как указывалось выше, точка приведения находится в центре пластины. Форму изгибных и крутильных колебаний для жесткого крепления концов пластины можно описать одной зависимостью.

$$f(x) = \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{L_x} \quad (5)$$

Определим коэффициенты, входящие в формулу (4).

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \int_0^{L_x} m_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L_x} dx = \frac{1}{2} \rho h L_x L_y, \\ a_{22} &= \int_0^{L_x} J_m \sin^2 \frac{\pi x}{L_x} dx = \frac{m_0 L_x L_y^2}{24}, \\ c_{11} &= \int_0^{L_x} EJ \left(\frac{\pi}{L_x} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L_x} dx = \frac{\pi^4 EJ}{2 L_x^3}, \\ c_{22} &= \int_0^{L_x} GJ_p \left(\frac{\pi}{L_x} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L_x} dx = \frac{\pi^4 GJ_p L_y}{2 L_x^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обобщенные силы, входящие в уравнения (4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int_0^{L_x} F_0 f(x) dx = \frac{2 F_0 L_x}{\pi}, \\ Q_2 &= \int_0^{L_x} M_0 \varphi(x) dx = \frac{2 M_0 L_x}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) все физические величины, имеющие индекс ноль, являются погонными (имеющими значения на единицу длины пластины).

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \rho h L_y, \\ J_{m_0} &= \frac{1}{12} \rho h L_y^3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Аэродинамические силы, действующие на пластину единичной длины, определяем по законам аэродинамики

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= c_y^a \frac{\rho_0 v^2}{2} L_y, \\ M_0 &= m_z^a \frac{\rho_0 v^2}{2} L_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь ρ_0 – плотность воздуха; v – скорость воздушного потока.

Производные коэффициентов подъемной силы и крутящего момента по углу атаки определяются по эмпирическим зависимостям.

$$\left. \begin{aligned} c_y^a &= \frac{2\pi L_x}{L_x + 4L_y}, \\ m_z^a &= c_y^a \frac{x_m - x_d}{L_y}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В последних формулах x_m – координата центра масс; x_d – координата центра давления.

Представленная математическая модель динамики пластины (4) – (10) позволяет найти критические области ее геометрических характеристик для фиксированной толщины от скорости набегающего потока воздуха. Ограничения задачи являются прочностные характеристики материала.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M_x}{W} = \frac{F_0 L_x^2}{2\pi W} \leq [\sigma], \\ \tau &= \frac{M_y}{W_p} = \frac{2M_0 L_x}{\pi W_p} \leq [\tau]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь: $W = L_y h^2/6$ – момент сопротивления при изгибе пластины; $W_p = L_y h^2/3$ – полярный момент сопротивления для сечения $\frac{L_y}{h} \geq 0$.

Результаты исследования математической модели динамики пластины представлены в табличном виде (табл.1)

Таблица 1.

$h(m)$	$v(m/c)$	$f(x) = (L_x/L_y)_{cr}$	$\varphi(x)$
0,1	20	30,5	30,31
	30	20,75	21,36
	40	16,25	15,67
	50	13,0	13,22
0,05	20	16,0	15,925
	30	11,0	11,225
	40	8,5	8,28
	50	7,0	7,08

Критические значения $(L_x/L_y)_{cr}$ делят области геометрических размеров на допустимые соотношения и недопустимые в зависимости от скорости воздуха.

Полученные табличные значения аргумента x функции $(L_x/L_y)_{cr}$ целесообразно аппроксимировать единой функциональной зависимостью.

Чаще всего задача аппроксимации решается с помощью многочленов. Для оценки близости аппроксимируемой функции к ее табличным значениям выбирается критерий согласия. Наиболее универсальными критериям согласия является такой, который обоснован на методе наименьших квадратов.

$$\rho = \min \sum_{i=1}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2. \quad (12)$$

Здесь $f(x_i)$ – функция, заданная табличным способом; $\varphi(x_i)$ – аналитическая функция.

Таким образом, необходимо найти функцию $\varphi(x)$, которая в точках x_i , $i = \overline{1, n}$ принимает значения как можно ближе к табличным значениям $f(x)$ в тех же точках. В результате анализа различного вида функций наиболее подходящей в данном случае является полином второго рода.

$$y = a + bx + cx^2. \quad (13)$$

Неизвестные коэффициенты функции (13) находятся путем решения линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} an + b \sum x + c \sum x^2 &= \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 &= \sum (x \cdot y), \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 &= \sum (x^2 \cdot y). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В данном случае аргументом является скорость воздуха ($x = v$), а функцией отношение геометрических размеров пластины (L_x/L_y) .

После решения системы линейных уравнений (14) будем иметь следующие функции:

– для $h = 0.1$ м

$$\varphi(x) = 57,95 - 1,707v + 0,01624v^2;$$

– для $h = 0.05$ м

$$\varphi(x) = 30,58 - 0,908v + 0,00875v^2.$$

Критерий согласия данных полиномов имеет минимальное значение из всех исследуемых ранее стандартных зависимостей.

Так для $h = 0,1$ м $p = 0,793$ м², для $h = 0,05$ м $p = 0,111$ м². Результаты исследований показаны на рисунке 2.

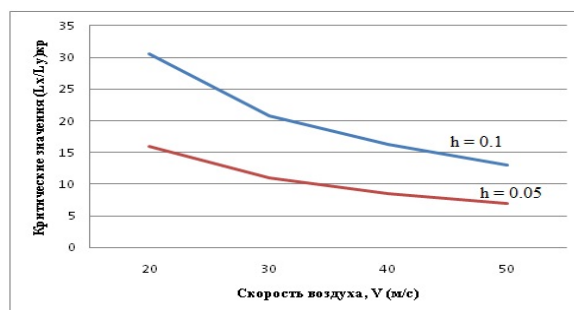


Рис.2. Границы динамической устойчивости пластины

Fig.2 Limit of plate dynamic stability

Представленные на рисунке 2 границы динамической устойчивости пластины не всегда удобны, так как их приходится искать для различных значений толщины пластины. Для объединения влияния и скорости, и толщины пластины на критическое отношение размеров пластины в плане предлагается подход, основанный на теории планирования экспериментов.

Статическую математическую модель при наличии нескольких аргументов можно построить для некоторой локальной области факторного пространства, лежащей в окрестности выбранной точки L – центра плана.

Для построения полинома второго порядка применим правила рототабельного планирования. Выберем следующий центр плана.

$$L(h = 0,07 \text{ м}; v = 30 \text{ м/с}).$$

Верхний и нижний уровни факторов соответственно равны

$$h_{\text{в}} = 0,1 \text{ м}; v_{\text{в}} = 40 \text{ м/с}.$$

$$h_{\text{н}} = 0,04 \text{ м}; v_{\text{н}} = 20 \text{ м/с}.$$

Рототабельное планирование позволяет получить более точное математическое описание поверхности исследуемой функции за счет большего числа экспериментов в центре плана..

Рототабельный план представлен в таблице 2.

Таблица 2.

N	x_h	x_v	$x_h x_v$	x_h^2	x_v^2	$h(\text{м})$	v (м/с)	$f(x)$	$\varphi(x)$
1	+	+	+	+	+	0,10	40	16,0	15,37
2	-	+	-	+	+	0,04	40	7,0	7,08
3	+	-	-	+	+	0,10	20	30,5	30,67
4	-	-	+	+	+	0,04	20	13,0	13,87
5	1,414	0	0	2	0	0,112	30	23,2	23,6
6	-1,414	0	0	2	0	0,0276	30	6,5	5,88
7	0	1,414	0	0	2	0,07	44,14	10,5	10,9
8	0	-1,414	0	0	2	0,07	15,86	27,2	26,6
9	0	0	0	0	0	0,07	30,0	15,0	15,0
10	0	0	0	0	0	0,07	30,0	15,0	15,0
11	0	0	0	0	0	0,07	30,0	15,0	15,0
12	0	0	0	0	0	0,07	30,0	15,0	15,0
13	0	0	0	0	0	0,07	30,0	15,0	15,0

После обработки результатов эксперимента находим полином вида

$$\varphi(x) = 15,0 + 6,273z_h - 5,523z_v - 2,125z_h z_v - 0,125z_h^2 + 1,875z_v^2. \quad (15)$$

В полиноме (15) все переменные при водятся в кодированных значениях. Переход в фактические физические величины осуществляется с использованием зависимостей

$$z_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2.$$

После подстановки значений (16) в полином (15) будем иметь

$$\varphi(x) = 18,3 + 440h - 1,18v - 7,08hv - 139h^2 + 0,0188v^2. \quad (16)$$

Расчеты выполненные по формуле (17) приведены в таблице 2 (последняя колонка). При этом критерий точности метода равен $\rho = 1,67$.

ВЫВОДЫ

1. Перечисленные в начале статьи достоинства висячих мостов могут быть перечеркнуты, если игнорировать их динамическую реакцию на аэродинамическую нагрузку. Проверка будущего полотна на динамическую устойчивость должна быть обязательной, как при аналитических расчетах, так и с использованием физических экспериментов.

2. В статье разработана аналитическая модель колебания пластины, которая вполне может являться моделью реального полотна висячего моста. Колебательный процесс пластины опирается на методику колебания балок с равномерно распределенной массой и приведёнными их характеристиками.

3. С помощью разработанного математического аппарата изгибно-крутильных колебаний пластины определены критические отношения длины пластины к ее ширине в зависимости от скорости набегающего потока воздуха и толщины самой пластины.

4. Полученный вычислительный материал был использован:

– для нахождения простых аналитических зависимостей $L_x/L_y = f(v)$ при фиксированном значении толщины пластины с применением метода наименьших квадратов разностей;

– определение обобщенной зависимости $L_x/L_y = f(v, h)$ от двух параметров с помощью теории планирования экспериментов в ограниченной области факторного пространства.

5. В дальнейшем полученный теоретический анализ динамической устойчивости пластины должен быть подтвержден:

проведением экспериментальных исследований на основе теории физического моделирования;

разработкой теоретической модели колебания пластины с применением методов теории упругости и ее сравнительным анализом с предыдущими этапами исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) Чемодуров В.Т., Литвинова Э.В., Сеitzhelitov M.S. Численные методы: монография. – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2017. – 196с.
- 2) Чемодуров В.Т., Жигна В.В. Методы теории планирования эксперимента в решении технических задач: монография. – Симферополь, 2012. – 112с
- 3) Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах: Уч. пособие для строит. спец. вузов. – 3-е изд., перераб.- М.: Высшая школа, 1987. – 264с
- 4) Вилков С.М. Методы решения задач строительной механики корабля: уч. пособие. – Санкт-Петербург: Типография ВМА, 2000. – 244с.
- 5) Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций: Уч. пособие для студентов высших учебных заведений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 528с.

REFERENCES

- 1) Chemodurov V.T., Litvinova E.V., Seitzhelitov M.S. Numerical methods: monograph. - Simferopol: IT "ARIAL", 2017. – 196p.
- 2) Chemodurov V.T., Zhigna V.V. Methods of the theory of experiment planning in solving technical problems: monograph. - Simferopol, 2012. -112 p.
- 3) Bezukhov N.I., Luzhin O.V., Kolkunov N.V. Stability and dynamics of structures in examples and tasks: Tutorial manual for building universities. - 3rd ed., Pererab.- M.: Higher School, 1987. – 264p.
- 4) Vilkov S.M. Methods of solving the problems of ship's structural mechanics: Tutorial allowance. - Saint-Petersburg: Printing-house of the VMA, 2000.- 244p..
- 5) Pogorelov V.I. Construction mechanics of thin-walled structures: Tutorial allowance for students of higher educational institutions. - St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2007. - 528p.

AERODYNAMICS OF VISIBLE BRIDGES

Chemodurov V.T., Kuzmenko O.A.

SUMMARY. Lately wide application in practice have to design motes hanging designs like the least expensive. However, the desire for relief of the structure makes to the growth of sensitive industry such bridges to the airflow in a period of strong winds. The resulting aerodynamic load-influence on the strength characteristics of the spans of such bridges. Determination of the critical correlation between the stability of hanging bridge spans to aerodynamic loads is an urgent task in the preliminary design of structures of this type. Thus, the purpose of this article is to determine the zones of dynamic stability of the hanging bridge spans, which depend on the speed of the incoming air flow. The flight model of the suspension bridge uses a flat plate. Langrange equations of the second kind are used to determine the position of the plate at any time. The paper uses a one-dimensional approach to the structure of the zones of stability of the plate to the wind load at a constant thickness. The criterion of the problem is the critical ratio of the span length to its width. The method of finding the functional connection of the critical parameters of the canvas from two variables: the thickness of the canvas and the speed of the air flow. This method relies on the rules of the rotatable design of experiments.

Key words: suspension bridges, aerodynamics, stability, torsional vibrations, bending vibrations, Roto-table planning.