*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.1(19). 2014*

УДК 512.566

О ПОЛУКОЛЬЦАХ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Начато изучение полуколец частичных функций и непрерывных частичных функций со значениями в произвольном полукольце S. Показано, что полукольца частичных S-значных функций изоморфны соответствующим полукольцам всюду определенных функций. Доказано, что любое T_1-пространство X определяется полукольцом $CP(X,S)$ всех непрерывных частичных функций на X со значениями в неодноэлементном топологическом полукольце с замкнутой единицей. Описаны максимальные идеалы полуколец $CP(X,S)$.

Ключевые слова: *полукольцо, топологическое пространство, полукольцо частичных функций.*

1. Введение

Работа относится к общей теории полуколец непрерывных функций.

Теория полуколец непрерывных неотрицательных вещественных функций на топологических пространствах изучалась в монографии [5]. Рассматривались также другие полукольца значений. Полукольцам непрерывных $[0,1]$-значных функций посвящена статья [4]. Частичные полукольца непрерывных $[0,\infty]$-значных функций изучались в [7]. Полукольца непрерывных функций со значениями в конечных D_0-полукольцах начали исследоваться в [6]. В самое последнее время Е.М. Вечтомов и Н.В. Шалагинова предприняли попытку изучения непрерывных $(0,\infty]$-значных функций.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К.

В данной работе рассматриваются полукольца частичных и непрерывных частичных функций со значениями в произвольном полукольце. Тематика работы примыкает к задачам определяемости топологических пространств полугруппами непрерывных функций и непрерывных частичных функций [1–3].

2. Полукольца SP^X

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно–ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, которая дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. Класс всевозможных полуколец образует многообразие.

Пусть S — полукольцо и X — произвольное множество. Положим:

$$S^X \text{ — множество всевозможных функций } X \to S,$$
$$SP^X = \bigcup\{SY : Y \subseteq X\} \text{ — множество всех частичных функций из } X \text{ в } S.$$

Множество S^X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций является полукольцом.

Через $D(f)$ обозначается область определения частичной функции f. На множестве SP^X определены полукольцевые операции по правилу:

$$D(f+g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g),$$

функции $f+g$ и $f \cdot g$ определяются поточечно, то есть $(f \dot{+} g)(x) = f(x) \dot{+} g(x)$ для всех $x \in D(x) \cap D(g)$. В результате множество SP^X становится полукольцом с *поглощающим* элементом $\varnothing$ — поглощающим как по умножению, так и по сложению $(+_\cap)$. Отношение

$$\rho_D : f \rho_D g \Leftrightarrow D(f) = D(g)$$

служит конгруэнцией на полукольце SP^X, причем, фактор-полукольцо SP^X/ρ_D является *моно-полукольцом*, изоморфным булеану $\langle B(X), \cap, \cap \rangle$ множества X, рассматриваемому с одной операцией $\cap$.

Пусть теперь на SP^X операция сложения $(+_\cup)$ задана формулой:

$$D(f+g) = D(f) \cup D(g),\ f+g \text{ определена поточечно на } D(f) \cap D(g),$$
$$f+g = f \text{ на } D(f) \setminus D(g) \text{ и } f+g = g \text{ на } D(g) \setminus D(f),$$

а умножение прежнее. В этом случае элемент $\varnothing$ является *нулем* полукольца SP^X, а фактор-полукольцо SP^X/ρ_D будет булевой решеткой, изоморфной булеану $\langle B(X), \cup, \cap \rangle$.

Пусть S — полукольцо с единицей 1. Важную роль в полукольцах вида SP^X играют *идемпотенты* (по умножению) e_A, $A \subseteq X : D(e_A) = A$ и $e_A(x) = 1$ для всех $x \in A$. В частности, это идемпотенты $e_x = e_{\{x\}}$ при $x \in X$, $e_X = 1$ и $e_\varnothing = \varnothing$. Элемент e_A служит единицей полуколец S^A и SP^A. Полукольцо $SP^A = e_A SP^X$ является главным идеалом полукольца SP^X.

К любому полукольцу S можно внешним образом присоединить нуль $\mathbf{0}$ (поглощающий элемент ∞), в результате чего получим новое полукольцо $S \cup \{\mathbf{0}\}$ $(S \cup \{\infty\})$ с нулем (соответственно, с поглощающим элементом).

Следующие утверждения показывают, что полукольца частичных функций изоморфны подходящим полукольцам (полных) функций.

Предложение 1. *Полукольцо* $\langle SP^X, +_\cap, \cdot\rangle$ *изоморфно полукольцу* $(S \cup \{\infty\})^X$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\alpha : SP^X \to (S \cup \{\infty\})^X$, заданное по правилу: для любой функции $f \in SP^X$

$$\alpha(f) = \begin{cases} f & \text{на} \quad D(f) \\ \infty & \text{на} \quad X \setminus D(f) \end{cases}.$$

Очевидно, что α — биекция.

Покажем, что α — изоморфизм полукольца $\langle SP^X, +_\cap, \cdot\rangle$ на полукольцо $(S \cup \{\infty\})^X$. Поскольку $a \dot{+} \infty = \infty$ для любого элемента $a \in S$, то для любых функций $f, g \in SP^X$ и точки $x \in X$ имеем:

$$(\alpha(f) \dot{+} \alpha(g))(x) = \begin{cases} f, & x \in D(f) \\ \infty, & x \in X \setminus D(f) \end{cases} \dot{+} \begin{cases} g, & x \in D(g) \\ \infty, & x \in X \setminus D(g) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f \dot{+} g, & x \in D(f) \cap D(g) \\ \infty, & x \in X \setminus (D(f) \cap D(g)) \end{cases} = \alpha(f \dot{+} g)(x).$$

□

Предложение 2. *Полукольцо* $\langle SP^X, +_\cup, \cdot\rangle$ *изоморфно полукольцу* $(S \cup \{\mathbf{0}\})^X$.

Доказательство. Определим $\alpha : SP^X \to (S \cup \{\mathbf{0}\})^X$ правилом: для любой функции $f \in SP^X$

$$\alpha(f) = \begin{cases} f & \text{на} \quad D(f) \\ \mathbf{0} & \text{на} \quad X \setminus D(f) \end{cases}.$$

Очевидно, что α — биекция.

Покажем, что α — изоморфизм полукольца $\langle SP^X, +_\cup, \cdot\rangle$ на полукольцо $(S\cup\{\mathbf{0}\})^X$. Поскольку $a\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ и $a+\mathbf{0}=a$ для каждого элемента $a\in S$, то для любых функций $f,g\in SP^X$ и точки $x\in X$ имеем:

$$(\alpha(f)\cdot\alpha(g))(x)=\begin{cases} f\cdot g, & x\in D(f)\cap D(g)\\ \mathbf{0}, & x\in X\setminus(D(f)\cap D(g))\end{cases}=\alpha(f\cdot g)(x);$$

$$(\alpha(f)+\alpha(g))(x)=\begin{cases} f, & x\in D(f)\\ \mathbf{0}, & x\in X\setminus D(f)\end{cases}+\begin{cases} g, & x\in D(g)\\ \mathbf{0}, & x\in X\setminus D(g)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} f+g, & x\in D(f)\cap D(g)\\ f, & x\in D(f)\setminus D(g)\\ g, & x\in D(g)\setminus D(f)\\ \mathbf{0}, & x\in X\setminus(D(f)\cup D(g))\end{cases}=\alpha(f+g)(x).$$

$\square$

Далее, для $X\supseteq B\supseteq A$ рассмотрим гомоморфизм ограничения $\pi_{BA}: S^B\to S^A$: если $f\in S^B$, то $\pi_{BA}(f)=f_{|A}\in S^A$. Получаем *прямой спектр* полуколец (S^D,π_{BA}), $D\subseteq X$, над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X),\supseteq\rangle$. *Прямым пределом* прямого спектра полуколец будет одноэлементное полукольцо $\{\varnothing\}$ с системой эпиморфизмов $\pi_{D\{\varnothing\}}$. Система (SP^D,π_{BA}) над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X),\subseteq\rangle$ образует *обратный спектр* полуколец, *обратным пределом* которого служит полукольцо SP^X с системой эпиморфизмов π_{XD}. Кроме того, полукольцо SP^X с системой вложений $SP^D\subseteq SP^X$ является пределом (объединением) прямого спектра полуколец SP^D с гомоморфизмами вложения над $\langle B(X),\subseteq\rangle$.

Замечания:

1. Вместо булеана $B(X)$ можно рассматривать произвольную решетку множеств, необязательно с наибольшим и/или наименьшим элементами.

2. Для каждого индекса (точки) $x\in X$ можно взять свое полукольцо S_x. Если (Π,X) — пучок полуколец (S_x), то естественно рассматривать полукольцо $\Gamma'(\Pi,X)$ частичных сечений.

3. Для любых кольца S и непустого множества X полукольца частичных функций $\langle SP^X,+_\cap,\cdot\rangle$ и $\langle SP^X,+_\cup,\cdot\rangle$ не являются кольцами, но будут дизъюнктными объединениями колец функций S^Y по всем $Y\subseteq X$.

4. Класс мультипликативно идемпотентных полуколец S (то есть полуколец с тождеством $xx=x$) замкнут относительно взятия: полуколец частичных S-значных функций, прямых и обратных пределов.

3. Полукольца $CP(X, S)$

Пусть теперь S — топологическое полукольцо, X — топологическое пространство. Полукольцо $C(X, S)$ всех непрерывных S-значных на X является подполукольцом полукольца S^X. Положим

$$CP(X, S) = \cup\{C(Y, S) : Y \subseteq X\}$$

— полукольцо всех непрерывных частичных S-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. Если пространство X дискретно или полукольцо S антидискретно, то $C(X, S) = S^X$ и $CP(X, S) = SP^X$.

Ясно, что $CP(X, S)$ есть подполукольцо в SP^X, а фактор-полукольцо $CP(X, S)/\rho_D$ снова изоморфно моно-полукольцу $\langle B(X), \cap, \cap\rangle$.

Заметим, что предложения 1 и 2 не переносятся на полукольца непрерывных частичных функций.

Полукольцо $CP = CP(X, S)$ имеет поглощающий элемент $\varnothing$. Если полукольцо S имеет 1, то и CP будет полукольцом с единицей $1 \in C(X, S)$.

Лемма 1. *Для любых* $f, g \in CP$

$$D(f) = D(g) \Leftrightarrow \forall h \in CP(fh = \varnothing \Leftrightarrow gh = \varnothing).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для любой функции $h \in CP$ равносильны следующие условия:

$$fh = \varnothing \Leftrightarrow gh = \varnothing,$$
$$D(f) \cap D(h) = \varnothing \Leftrightarrow D(g) \cap D(h) = \varnothing.$$

□

Лемма 2. *Для любого* $f \in CP$

$$f \in C(X, S) \Leftrightarrow \forall h \in CP(h \neq \varnothing \Rightarrow fh \neq \varnothing).$$

Доказательство. Используя лемму 1, имеем:

$$f \in C(X, S) \Leftrightarrow X = D(f) \Leftrightarrow \forall h \in CP(1 \cdot h = \varnothing \Leftrightarrow fh = \varnothing) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall h \in CP(h \neq \varnothing \Leftrightarrow fh \neq \varnothing) \Leftrightarrow \forall h \in CP(h \neq \varnothing \Rightarrow fh \neq \varnothing).$$

□

В следующих леммах предполагается, что топологическое полукольцо S содержит единичный элемент 1 и $\{1\}$ есть собственное замкнутое подмножество в S, а X — произвольное T_1-пространство.

Лемма 3. *Для каждого $f \in CP$, $f \neq \varnothing$, выполняется*

$$(\exists x \in X f = e_x) \Leftrightarrow$$
$$\forall h \in CP((fh \neq \varnothing \Rightarrow D(fh) = D(f)) \text{ и } (D(f) = D(h) \Rightarrow fh = h)).$$

Доказательство. Для точки $x \in X$ имеем $e_x h \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in D(h)$ для любой функции $h \in CP$. Отсюда следует импликация $\Rightarrow$.

Импликацию $\Leftarrow$ докажем методом от противного. Пусть $\varnothing \neq f \neq e_x$ для любой точки $x \in X$, но для всех функций $h \in CP$ выполняются условия:

$$\text{если } fh \neq \varnothing, \text{ то } D(fh) = D(f), \tag{1}$$
$$\text{если } D(f) = D(h), \text{ то } fh = h. \tag{2}$$

Возможны два случая:
1) $D(f)$ содержит различные точки x, y. Тогда $fe_x \neq \varnothing$ и $D(fe_x) \neq D(f)$, что противоречит условию (1);
2) $D(f) = \{x\}$ и $f(x) \neq 1$ для некоторой точки $x \in X$. Тогда $fe_x \neq e_x$, что противоречит условию (2). □

Лемма 4. *Для каждого $f \in CP$*

$$(\exists A \subseteq X f = e_A) \Leftrightarrow \forall e_x \in CP(fe_x = e_x \text{ или } fe_x = \varnothing).$$

Доказательство. Имеем

$$\exists A \subseteq X(f = e_A) \Leftrightarrow \forall x \in X((x \in D(f) \text{ и } f(x) = 1) \text{ или } (x \notin D(f))) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall e_x \in CP(fe_x = e_x \text{ или } fe_x = \varnothing).$$

□

Лемма 5. *Множество $A \subseteq X$ замкнуто $\Leftrightarrow$*

$$\forall e_x \in CP(e_A e_x = \varnothing \Rightarrow \exists f \in CP(fe_A = e_A \text{ и } \varnothing \neq fe_x \neq e_x)).$$

Доказательство. Замкнутость множества A в X эквивалентна условию:

$$\forall x \in X(x \notin A \Rightarrow \exists \text{ замкнутое в } X \text{ множество } B \supseteq A, x \notin B).$$

Пусть A — замкнутое подмножество T_1-пространства X и $x \in X \setminus A$. Рассмотрим функцию $f \in SP^X : D(f) = A \cup \{x\}$, $f = 1$ на A, $f(x) \neq 1$. Частичная функция f непрерывна на своей области определения, для нее $fe_A = e_A$ и $\varnothing \neq fe_x \neq e_x$.

Обратно, пусть для произвольной точки $x \in X \setminus A$ найдется функция $f \in CP$, для которой $fe_A = e_A$ и $\varnothing \neq fe_x \neq e_x$. Тогда множество $f^{-1}(1)$

замкнуто в $D(f)$ и $x \in D(f) \setminus f^{-1}(1)$. Значит, подмножество A замкнуто в X. $\square$

Заметим, что полугруппы непрерывных частичных функций рассматривались в [2, 3]. Следующее утверждение развивает тематику определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них (см. обзор [1]).

Теорема 1. *Пусть S — неодноэлементное топологическое полукольцо с единицей 1 с замкнутым множеством $\{1\}$ и X, Y — произвольные T_1-пространства. Тогда эквивалентны следующие условия:*
1) X и Y гомеоморфны;
2) полукольца $CP(X,S)$ и $CP(Y,S)$ изоморфны;
3) мультипликативные полугруппы $CP(X,S)$ и $CP(Y,S)$ изоморфны.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Rightarrow$ 1). В силу лемм 3–5, произвольное T_1-пространство X можно сконструировать, исходя из мультипликативной полугруппы полукольца $CP(X,S)$, как множество $\{e_x : x \in X\}$ с системой замкнутых множеств $\{e_x : x \in A\}$, соответствующих замкнутым множествам $A \subseteq X$.

$\square$

В терминах полуколец $CP(X,S)$ можно не только доказать определяемость топологических пространств X, но и получить характеризации различных топологических свойств пространств X.

В дальнейшем можно исследовать алгебраические свойства полуколец $CP(X,S)$. В заключение приведем один результат такого сорта.

Предложение 2. *Для любых топологического пространства X и топологического полукольца S с единицей 1 максимальные идеалы полукольца $CP(X,S)$ имеют вид $(CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$, где M — произвольный максимальный идеал полукольца $C(X,S)$.*

Доказательство. Ясно, что $(CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$ — максимальный идеал в $CP(X,S)$ для всякого максимального идеала M полукольца $C(X,S)$.

Покажем, что других максимальных идеалов в полукольце $CP(X,S)$ нет. Пусть J — собственный идеал полукольца $CP(X,S)$ $(1 \notin J)$.

Если $J \cap C(X,S) = \varnothing$, то $J \subseteq (CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$ для любого идеала M полукольца $C(X,S)$. В противном случае собственный идеал $J \cap C(X,S)$ полукольца $C(X,S)$ содержится в некотором его максимальном идеале M. Значит, $J \subseteq (CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$. $\square$

Список литературы

1. **Вечтомов Е. М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // *Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Алгебра. Геометрия. Топология. 1990. Т. 28. С. 3–46.*

2. **Вечтомов Е. М.** Определяемость топологических пространств полугруппами непрерывных частичных функций // *Киров, 1987. Деп. ВИНИТИ № 256-В88. 21 с.*

3. **Вечтомов Е. М.** О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах // *УМН. 1990. Т. 46. Вып. 4. С. 143–144.*

4. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** Полукольца непрерывных [0, 1]-значных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 53–82.*

5. **Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Полукольца непрерывных функций. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. 312 с.

6. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Полукольца непрерывных функций со значениями в T_0-полукольцах // *Тенденции и перспективы развития математического образования: материалы XXXIII Междунар. науч. семинара преподавателей математики информатики ун-тов и пед. вузов, посвященного 100-летию ВятГГУ, 25-27 сент. 2014 г. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2014. С. 145–147.*

7. **Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В.** Простые идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$-значных функций // *Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1 (24). С. 5–12.*

Summary

Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. About semirings of partial functions

The article is starting the study of semirings of partial functions and continuous partial functions with values in an arbitrary semiring S. It is shown that a semiring of partial S–valued functions is isomorphic to the corresponding semiring of total functions. It is proved that any T_1–space X is defined by the semiring of $CP(X, S)$ of all continuous partial functions on X with values in a non single–element topological semiring with a closed unit.

Keywords: semiring, topological space, semiring of partial functions.

ВятГГУ *Поступила 30.09.2014*