

6ACCDAE13EFF
7I3L9N4O4QR
R4S8TI2UX



Евгений Макаров,
завотделом дифференциальных уравнений
Института математики НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук,
профессор

Непонятный набор букв и цифр на месте заголовка не результат сбоя в работе редакционного компьютера, не обрывок файла в неправильной кодировке и тем более не запись шахматной партии. Эта короткая строка символов – текст самой первой в истории математики научной публикации по теории дифференциальных уравнений. В предназначенном для передачи Г.Ф. Лейбницу письме к секретарю Лондонского Королевского общества, основателю и редактору «Философских трудов Королевского общества» Г. Ольденбургу от 24 октября 1676 г. И. Ньютон говорит о недавно им открытом новом методе:

Таковы были обычаи эпохи: научные журналы выходили редко и добивались до адресата долго. Поэтому о новых научных достижениях ученые, как и прежде, предпочитали узнавать из переписки с друзьями и коллегами. Если же результат оставался недостаточно проработанным, а необходимость сохранения за автором его прав на первенство уже присутствовала, сообщение шифровалось или представлялось в виде анаграммы. В ней числовые коэффициенты указывают, сколько раз данная буква повторяется в тексте фразы. При хорошем знании латыни ее можно расшифровать. Но из-за разгоревшегося спора с Лейбницем по поводу приоритета расшифровка последовала лишь через десятилетие и была дана самим Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии», вышедших в 1687 г. [1]. Там, в «Поучении» ко второму отделу второй книги, он пишет, что его главное открытие, которое он считал нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvunt fluxiones invenire et vice versa», то есть «Дано уравнение, заключающее в себе текущие

«The foundations of these operations is evident enough, in fact;
but be-cause I cannot proceed with the explanation of it now, I have preferred to conceal it thus:
6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.
On this foundation I have also tried to simplify the theories which concern
the squaring of curves,
and I have arrived at certain general Theorems».

«На самом деле, основы этих операций достаточно очевидны;
но поскольку я не могу продолжить объяснение этого сейчас,
я предпочел скрыть его таким образом: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.
На этом основании я также попытался упростить теории, относящиеся
к квадратуре кривых, и я пришел к некоторым общим теоремам».

количества (флюенты), найти течения (флюксии) и наоборот» [2, 3].

В современной терминологии флюенты Ньютона стали функциями, а флюксии – их производными. Поскольку дифференциальные уравнения связывают значения тех и других, в отечественной научно-популярной литературе сложилась традиция расшифровывать анаграмму Ньютона, не углубляясь в математические тонкости: «Полезно решать дифференциальные уравнения. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, возьмем самый простой пример всем известной школьной задачи.

Бассейн наполняется водой из крана за 3 часа, опорожняется через отверстие в дне за 2 часа. Какое время потребуются для его опорожнения при открытом кране, если в начальный момент бассейн полон?

Школьный метод решения состоит в следующем. Принимается, что полный объем бассейна равен единице, соответственно, скорость его наполнения равна $1/3$, а опорожнения – $1/2$ бассейна в час. Тогда приход воды из крана за время t есть $t/3$, а убыль за то же время составляет $t/2$. Вычисляя суммарное изменение объема за это время ($t/3 - t/2 = t/6$) и приравнявая его к единице, получаем «школьный» ответ: за 6 часов. Нетрудно сообразить, что он неверен [4]: скорость опорожнения зависит от уровня воды в бассейне и уменьшается с его падением. В условиях задачи наполненность бассейна, скорее всего, будет асимптотически стремиться к некоторому стационарному значению, отвечающему равенству скоростей заполнения и опорожнения. С этой точки зрения правильный ответ: никогда не выльется. Разумеется, в таком общем виде этот ответ тоже неверен, поскольку вода из крана не может течь неограниченное время, а с другой стороны – в зависимости от параметров задачи предполагаемый стационарный уровень может оказаться отрицательным, и тогда бассейн все-таки сможет опорожниться за конечное время. Следовательно, здесь нужно сначала правильно поставить задачу.

В действительности она состоит в том, чтобы определить стационарный уровень заполнения, если он положителен, или же в противном случае найти время падения уровня до 0, если в условиях задачи это происходит. Все это можно сделать, лишь выразив скорость заполнения и опорожнения бассейна через величины, присутствующие

в условии задачи, и записав дифференциальное уравнение, связывающее скорость изменения объема воды в бассейне с ее количеством в нем. Скорость заполнения естественно принять равной $1/3$, как и в «школьном» варианте решения: предположение о постоянстве притока воды через трубу не оговорено явно в условии задачи, но представляется достаточно правдоподобным. Найти скорость опорожнения сложнее, для этого придется обратиться к специальной литературе и выяснить, что расход воды через небольшое отверстие выражается формулой Торричелли с учетом эмпирического коэффициента расхода [5].

В результате исходная задачка из учебника по арифметике сведется к дифференциальному уравнению

$$\dot{V} = \frac{1}{3} - a\sqrt{V}, \quad (1)$$

с неизвестным пока коэффициентом a и начальным условием $V(0)=1$, означающим, что в начальный момент бассейн полон. Учет данного условия здесь обязателен, поскольку разным начальным уровням воды в бассейне отвечают разные зависимости количества воды от времени, то есть различные решения уравнения (1).

Символ $\dot{V}$ в уравнении (1) – изменение объема воды в бассейне за единицу времени. Именно такое обозначение – точка над буквой – использовал Ньютон. По традиции обозначение до сих пор часто применяется, особенно в работах по механике, для обозначения производных по времени (то есть скоростей изменения) различных величин, тогда как в других случаях применяют штрих рядом с буквой, например $f'(x)$, предложенный Лейбницем.

Если кран, из которого наполняется бассейн, перекрыт, изменение объема воды описывается более простым дифференциальным уравнением

$$\dot{V} = -a\sqrt{V}, \quad (2)$$

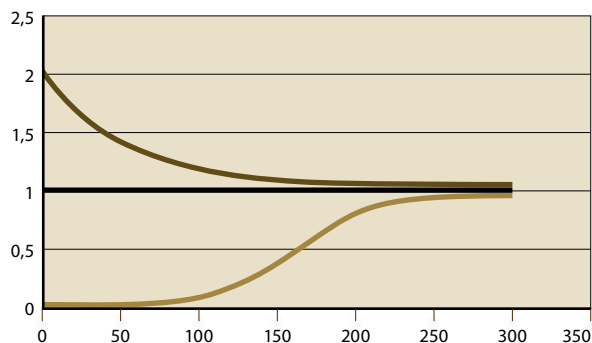
решая которое, находим время опорожнения целиком заполненного бассейна через отверстие в дне: оно равно $2/a$. Отсюда, используя условие задачи, находим, что коэффициент a равен 1. Теперь нам остается найти решение уравнения

$$\dot{V} = \frac{1}{3} - \sqrt{V}, \quad (3)$$

удовлетворяющее начальному условию $V(0)=1$.

Однако здесь нас ждет разочарование: в явном виде требуемое решение получить невозможно. Тем не менее, используя средства, предоставляемые теорией дифференциальных уравнений, ответ на вопрос задачи мы все же можем получить. Для определения

Рисунок.
Типичные
решения
логистического
уравнения



стационарного уровня достаточно приравнять к 0 правую часть уравнения (3) и из полученного уравнения найти V . Искомое значение составляет $1/9$ полного бассейна. Достигнут же этот уровень никогда не будет, поскольку $1/9$ не является ни максимумом, ни минимумом, ни точкой перегиба правой части уравнения (3).

Приведенный пример, возможно, несколько эпатажный, тем не менее демонстрирует две важнейшие черты, характерные для всей идеологии дифференциальных уравнений и в особенности для их применений в естествознании:

- относительно простые на вид дифференциальные уравнения могут описывать очень сложное поведение, в основе чего лежит простота законов, управляющих поведением реальных систем в малом;
- в явном виде решения дифференциальных уравнений удастся отыскать лишь в редких случаях. Но, пользуясь изощренными средствами теории, можно получить большой объем нужной информации о решениях, даже когда их формульное выражение совершенно недоступно.

Еще недавно слово «инфинитезимальный» активно использовалось везде, где шла речь о бесконечно малых. Ныне сфера его употребления значительно сократилась. Произошла коренная перемена точки зрения математики на бесконечно малые, и теперь даже в первичных учебниках по дифференциальным уравнениям это понятие все чаще замещают функции, линейные на слоях касательного расслоения [6]. Эта замена очень важна для наведения порядка в формальных структурах теории, но для неформального понимания сущности дифференциальных уравнений роль нестрогого понятия бесконечно малой величины неоценима: именно инфинитезимальные соотношения между бесконечно малыми приращениями зависимых величин и есть законы, которым подчинено поведение реальных систем в малом, локально.

Наиболее зримо простота и общность этих локальных законов проявляется в начальных главах математической биологии [7], где ряд математических моделей, имеющих фундаментальное значение для теории и достаточно адекватно описывающих существенные особенности многих биологических явлений, может быть построен в виде простых дифференциальных уравнений на основе крайне общих идей и соображений [6].

Так, уравнение нормального (экспоненциального) размножения

$$\dot{x} = rx, \quad r > 0, \quad (4)$$

основано на предположении, что прирост Δx

Исследования в области дифференциальных уравнений в Институте математики НАН Беларуси проводятся с момента его основания в 1959 г. В первые годы они концентрировались в основном на проблемах аналитической и, в несколько меньшей степени, качественной теории. Это было время бурного роста новой белорусской школы по дифференциальным уравнениям, созданной в 50–60-е гг. прошлого века Н.П. Еругиным. Одной из ее особенностей, во многом определившей достигнутые успехи, было требование, постоянно выдвигавшееся основателем школы, — решать задачу всеми доступными методами: аналитическими, асимптотическими или качественными, не обращая

внимания на то, в рамках какого раздела теории эта задача исходно возникла. Результаты, полученные в этот период, отражены в юбилейном историческом обзоре «Математика — наука прикладная: 50 лет Институту математики НАН Беларуси».

В конце 70-х тематика исследований заметно изменилась: на первое место вышли задачи, связанные с теорией устойчивости и, в частности, с первым и вторым методами Ляпунова в ней. Работы по развитию второго метода Ляпунова — теории функций Ляпунова — были организованы крупнейшим специалистом в этой области — академиком Е.А. Барбашиним. Сегодня они проводятся под руководством академика И.В. Гайшуна. Инициатором

исследований по теории показателей Ляпунова в республике был профессор Ю.С. Богданов, которому принадлежит ряд фундаментальных теорем этой теории.

Основы теории характеристических показателей, как и всей современной теории устойчивости, были заложены в диссертации А.М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», защищенной им в 1892 г. и тогда же опубликованной отдельным изданием Харьковского математического общества. В этом труде рассмотрен основной вопрос, который издавна занимал многих математиков и инженеров, — в каких случаях о характере движения системы можно судить по ее линейной части.

численности размножающейся популяции за малый промежуток времени Δt пропорционален текущему количеству x особей в ней. Это предположение может выполняться, пока пищи достаточно много и нет естественных врагов и охотников. Его следствие – ничем не ограниченный (экспоненциальный) рост величины x независимо от начальных условий.

С ростом популяции конкуренция из-за пищи и других экологических факторов приводит к уменьшению плодовитости составляющих ее особей. Уравнение размножения с учетом конкуренции (иначе называемое логистическим или же уравнением Ферхюльста)

$$\dot{x} = rx(1 - x/K), \quad r, K > 0 \quad (5)$$

описывает ограниченный рост популяции и выводится из предположения о линейной зависимости коэффициента размножения от ее численности, что почти всегда можно считать справедливым при условии не слишком больших отклонений этого коэффициента от основного значения. В математической биологии величина K называется емкостью экологической ниши популяции и имеет смысл максимально возможной ее численности на больших промежутках времени, поскольку любое решение уравнения (5) со временем приближается к этому значению: сверху, если начальная численность велика, и снизу – в противном случае. При малых значениях x решение неотлично от экспоненты, а при его приближении к K становится почти постоянным.

В 1838 г. бельгийский математик П. Ферхюльст, основываясь на предложенном им уравнении (5) и своих расчетах, оценил максимальную численность населения Бельгии величиной 9,4 млн человек [7]. На тот момент оно составляло немногим более 4 млн и было относительно стабильно, однако примерно с 1840 г. началась полоса экспоненциального роста. За вторую половину XIX и начало XX в. число бельгийцев значительно выросло, но вплоть до 1989 г. прогноз демонстрировал исключительную точность. При приближении к предсказанной предельной величине естественный прирост при невысоком абсолютном уровне стал демонстрировать отчетливую тенденцию к дальнейшему снижению. После 1964 г. численность населения почти стабилизировалась, увеличившись с 9,499 млн в 1964 г. до 9,938 млн в 1989 г., когда началась новая полоса экспоненциального роста, связанная с массовым наплывом иммигрантов из стран Европы и Африки. На 2016 г. население Бельгии, по данным «Википедии», составляло около 11,25 млн человек, в том числе более 2 млн недавних мигрантов, что позволяет считать прогноз П. Ферхюльста сохраняющим свою силу и по сей день.

В силу очевидных исторических причин для Беларуси сравнимый по качеству прогноз на столь простой теоретической основе едва ли возможен.

Аналогичными и не намного более сложными рассуждениями обосновывается вывод

Процедура линеаризации хорошо работает для систем со стационарной (то есть не зависящей от времени) линейной частью и при определенных условиях сохраняет некоторые виды устойчивости. Эта техника проста и успешно освоена инженерными дисциплинами. Все становится гораздо сложнее, когда линейная часть нестационарна.

Центральная проблема теории характеристических показателей, которая сейчас называется проблемой Ляпунова, состоит в математически строгой характеристике связей между асимптотическим поведением нелинейной системы и системы ее линейного приближения. Важнейшая составная часть этой проблемы – две задачи

Ляпунова о сохранении устойчивости при линеаризации, общая и частная, отличающиеся допустимым набором нелинейных возмущений. В общей задаче рассматриваются возмущения фиксированного порядка малости, в частной – все возмущения высшего порядка малости (то есть не являющиеся линейными). Частная и, в некритическом случае, общая задачи Ляпунова решены академиком Н.А. Изобовым, возглавляющим ныне исследования по теории показателей в Беларуси.

В самое последнее время развитие исследований по теории детерминированного хаоса, где локальная неустойчивость решений имеет первостепенное

значение, привело к понижению важности исследования не только устойчивости, но и неустойчивости. В недавних работах Н.А. Изобова, выполненных совместно с академиком РАН С.К. Коровиным и членом-корреспондентом РАН А.В. Ильиным в рамках белорусско-российских проектов БРФФИ, поставлен и решен ряд задач, связанных с эффектом Перрона, заключающимся в инверсии знака ляпуновского показателя при проведении процедуры линеаризации.

Выполняются также и другие работы, объединенные общей темой контролируемой стабилизации и дестабилизации дифференциальных систем.

дифференциальных уравнений системы Лотки – Вольтерры и других систем, описывающих взаимодействие двух биологических видов при различных типах отношений между ними, включая конкуренцию, хищничество, паразитизм и симбиоз [7].

Разумеется, роль здравого смысла в процессе вывода дифференциальных уравнений, входящих в состав математических моделей реальных систем, не стоит преувеличивать. Гораздо чаще здесь будут требоваться не общие соображения, а точное знание законов механики, физики, биологии и других наук, описывающих явления, происходящие в исследуемых системах. В этом смысле обильнейшим источником дифференциальных уравнений является лагранжева механика с ее рецептом построения уравнений движения механической системы по лагранжиану – функции обобщенных координат системы, определяемой как разность между ее кинетической и потенциальной энергией [8].

Другое дело там, где законы твердо не установлены, а условия задач содержат пробелы, требующие восполнения правдоподобными предположениями. Степень безнаказанности таких предположений иногда бывает очень высокой, что составляет одну из поразительнейших загадок природы, ту самую, которую многие математики, физики и философы всегда описывали как неопостижимую эффективность математики. По многократно высказанному мнению В.И. Арнольда, причина здесь в том, что «математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук» [9]. Соответственно, и анаграмму Ньютона с его точки зрения следует толковать так: «законы природы выражаются дифференциальными уравнениями» [4]. Вопрос о том, насколько правильно такое объяснение, остается открытым.

Справедливости ради следует сказать, что видимое безразличие к произвольным допущениям возможно далеко не всегда. Например, при выводе уравнения (1) мы неявно предположили, что бассейн имеет цилиндрическую форму и поэтому площади всех его сечений горизонтальными плоскостями одинаковы. Формула Торричелли дает для расхода воды через отверстие выражение $\mu\sqrt{h}$, где h – высота столба воды над отверстием, а μ – эмпирический коэффициент. В цилиндрической емкости количество воды прямо пропорционально ее уровню, но для других форм водоема это не так и для них зависимость расхода воды от ее наличного объема могла бы получиться совершенно иной.

Как видим, мир дифференциальных уравнений чрезвычайно близок к физической реальности и потому очень разнообразен. Соответственно, разнообразна и теория дифференциальных уравнений. Ее сравнение с беспорядочным конгломератом разнородных идей, методов и теорий стало уже общим местом. Действительно, наряду с простейшими прописями интегрирования специальных типов уравнений в элементарных функциях и квадратурах и общей теорией, трактующей лишь вопросы существования и единственности решений, здесь мирно уживаются такие разные сущности, как теории линейных уравнений и систем, уравнений Бесселя и Пенлеве, периодических и почти периодических решений, качественная теория динамических систем второго порядка и многое другое, достаточно условно объединяемое в три больших теории: аналитическую, асимптотическую и качественную. На территорию дифференциальных уравнений значительной своей частью заходит теория устойчивости со своими первым и вторым методами Ляпунова, более известными как теория характеристических показателей и теория функций Ляпунова. Сюда же примыкают многообразные численные методы для дифференциальных уравнений. Теория уравнений в частных производных и уравнений с отклоняющимся аргументом, которых мы здесь не касаемся, еще более обширна и имеет свои подразделения.

Этот кажущийся беспорядок не случаен, а закономерен. Он вызван к жизни необходимостью использовать для получения нужной информации о решениях изучаемого уравнения все доступные методы, поскольку ни один из них не в состоянии решить эту проблему полностью, точно так же, как никакой метод не может дать полной информации о любом реальном объекте. За исключением относительно небольшого круга идей и теорий, имеющих своей целью построение явных аналитических представлений решений. Назначение большинства остальных разделов теории дифференциальных уравнений – получать сведения о поведении системы косвенными, обходными методами, минуя этап отыскания одного или нескольких решений в сколь-нибудь явном виде.

Среди специалистов, считающих себя практиками по преимуществу, иногда бытует мнение, что большая часть теории дифференциальных уравнений не нужна, поскольку любое решение любого дифференциального уравнения можно с любой нужной точностью

отыскать с помощью численных методов [4]. Едва ли такое мнение можно признать справедливым. Академик В.И. Арнольд не находил нужным даже подробно обсуждать эту точку зрения, лишь кратко замечая в своем учебнике: «Вычислительные машины позволяют приближенно находить решения дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени, но не дают ответа на качественные вопросы о поведении фазовых кривых в целом» [6]. Неоспоримость его позиции совершенно очевидна для всех, кто серьезно связан с математикой. Для тех же, кто сомневается, приведем пример.

Действующий стандарт [16] рекомендует использовать для определения величины опасных факторов пожара в помещении (температуры, концентрации токсичных газов и прочего) интегральную модель, описывающую динамику среднеемких значений таких факторов на начальной стадии пожара. Для восстановления их распределения по пространству используются типовые шаблоны. Несмотря на это, применение интегральной модели дает довольно правдоподобные результаты, особенно при большом притоке наружного воздуха, например при включенной системе противодымной вентиляции. Система уравнений этой модели в зависимости от типа пожарной нагрузки, то есть предметов мебели и элементов строительных конструкций, сгорающих во время пожара, включает в себя до десятка дифференциальных уравнений, столько же начальных условий и ряд дополнительных соотношений, зависящих от множества числовых параметров. Неприятная особенность этой модели – жесткость, значительно затрудняющая численные расчеты.

Аккуратный теоретический анализ интегральной модели позволил провести правильную агрегацию параметров задачи и редукцию системы уравнений без потери адекватности и точности модели [17, 18]. В результате в системе осталось лишь одно уравнение, зависящее только от одного параметра, а все необходимые величины, характеризующие интенсивность опасных факторов пожара в каждый данный момент времени, удалось выразить через его единственное фиксированное решение. Были также приняты меры для повышения устойчивости численного решения полученного уравнения, что позволило отказаться от применения специальных численных методов, ориентированных на жесткие задачи.

На этой основе была создана простая методика (допускающая ручной счет) для определения

критической продолжительности пожара по всем его опасным факторам в помещении с открытыми проемами или функционирующей противодымной вентиляцией, использованная при подготовке нового Технического кодекса установившейся практики «Здания и сооружения. Пути эвакуации из высотных зданий. Строительные нормы проектирования». Эта разработка выполнена отделом дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси в сотрудничестве со специалистами Командно-инженерного института МЧС. К сожалению, вклад математиков в технические разработки чаще остается недооцененным.

Преобладающее отношение к возможностям теоретической математики сродни отношению к умению читать буквы: и то, и другое кажется само собой разумеющимся и совершенно ничего не стоящим. Действительно, определенное сходство есть. Когда Галилей писал свои знаменитые слова об алфавите книги Природы [20]:

«Философия написана в той величественной Книге (я имею в виду Вселенную), которая всегда открыта нашему зору, но читать ее может лишь тот, кто сначала освоит язык и научится понимать знаки, которыми она начертана. Написана же она на языке математики, и знаки ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остается лишь блуждать в темном лабиринте», –

он еще ничего не знал о дифференциальных уравнениях: до письма Ньютона Ольденбургу оставалось более 50 лет. Но роль математики им определена предельно точно. Сегодня, зная историю естествознания за прошедшие с тех пор почти 400 лет, мы можем к этому добавить лишь то, что Ньютон скрыл в своей анаграмме: «Природа говорит с нами языком дифференциальных уравнений, и чтобы ее понимать, необходимо владеть им настоящим образом». ■

 <http://innosfera.by/2017/07/equations>

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов С.И. Исаак Ньютон: 1643–1727. – М., 1989.
2. Newton I. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. – London, 1687.
3. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – М., 1989.
4. Блехман И.И., Мышкис Д.А., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М., 1990.
5. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л., 1982.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 2012.
7. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – М.; Ижевск, 2011.

Полный список литературы размещен на сайте innosfera.by