УДК 514.7

2-ПОВЕРХНОСТЬ В E_6

И.В. Артеменко[1], В.И. Машанов
Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

Рассматривается геометрия 2-поверхности в E_6, построено инвариантное касательное оснащение 2-поверхности в E_6. Для оснащения рассмотрено построение 2-й квадратичной формы, найдены кривизна линии на 2-поверхности, соприкасающаяся плоскость, бинормаль 2-поверхности, кривизна сечения поверхности по данной нормали, главные и средние кривизны поверхности по данной нормали, индикатрисы кривизны. В связи с рассмотрением указанных элементов доказаны теоремы.
Библиогр. 1 назв.

Ключевые слова: 2-поверхность в E_6; оснащение; квадратичные формы; кривизны.

2-SURFACE IN E_6

I.V. Artemenko, V.I. Mashanov
National Research Irkutsk State Technical University,
83, Lermontov St., Irkutsk, 664074.

The article deals with the geometry of the 2-surface in E_6. The authors construct an invariant tangent clothing of the 2-surface in E_6. For the clothing they consider the construction of the second quadratic form. They find the curvature of a line on the 2-surface, the osculating plane, the binormal of the 2-surface, the curvature of the surface cross section on the normal, principal and mean curvatures of the surface on this normal, curvature indicatrices. In connection with the examination of these elements the theorems are proved.
1 source.

Key words: 2-surface in E_6; clothing; quadric quantic (quadratic forms); curvatures.

Пусть в E_6 задана поверхность достаточное число раз дифференцируемой вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u^1, u^2\right).$$

Деривационные формулы ортонормального репера имеют вид:

$$d\vec{\rho} = \omega^i \vec{e}_i ;$$

$$d\vec{e}_j = \omega_j^i \vec{e}_i$$

с уравнениями структуры

$$D\omega^i = \omega^k \Lambda \omega_i^k ;$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \Lambda \omega_k^i .$$

Совместив вершину репера с точкой $M(\vec{r})$ поверхности, а грань $\{M, \vec{e}_1, \vec{e}_\alpha\}$ – с касательной плоскостью, получаем дифференциальные уравнения:

$$\omega^\eta = 0 ;\ \ \eta = \overline{3,6} . \qquad (1)$$

Условия их полной интегрируемости имеют вид

$$\omega_2^\alpha \Lambda \omega_\alpha^\eta = 0 ;\ \ \alpha = 1,2 .$$

Считая ω^1, ω^2 базисными формами кольца дифференциалов главных параметров u^1, u^2, по лемме Картана получаем:

$$\omega_\alpha^\eta = b_{\alpha\beta}^\eta \omega^\beta ,\ \ \alpha, \beta = 1,2 . \qquad (2)$$

В построенном репере первого порядка первая квадратичная форма

$$I = ds^2 = \left(\omega^1\right)^2 + \left(\omega^2\right)^2 .$$

Так как в данной точке M поверхности имеется 4-мерное нормальное векторное подпространство $VN = \alpha\left(\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right)$ (здесь α – символ линейной оболочки данной совокупности векторов), то единственной второй квадратичной формы пока не имеется, однако мы можем найти такие формы по векторам произвольного ортонормального базиса нормали

$$N = \left\{M, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right\}:$$

$$II^\eta = b_{\alpha\beta}^\eta \omega^\alpha \omega^\beta , \qquad (3)$$

геометрический смысл которых будет дан п. 5.

Завершает построение репера первого порядка нахождение условий полной интегрируемости

$$\left(db_{\alpha\beta}^\eta - b_{\gamma\rho}^\eta \omega_\alpha^\gamma - b_{\alpha\gamma}^\eta \omega_\beta^\gamma + b_{\alpha\beta}^\xi \omega_\xi^\eta\right) \Lambda \omega^\rho , \qquad (4)$$

уравнений (2) и их следствий

$$\delta b_{\alpha\beta}^\eta = b_{\gamma\beta}^\eta \pi_\alpha^\gamma + b_{\alpha\gamma}^\eta \pi_\beta^\gamma - b_{\alpha\beta}^\xi \pi_\xi^\eta , \qquad (5)$$

являющихся дифференциальными уравнениями движений репера в зависимости от вторичных параметров (вращений в касательной плоскости *TM* нормали N *M*). Здесь δ – символ дифференцирования по указанным вторичным параметрам, а π – формы дифференциалов этих параметров (вторичные формы) [1, гл. 3, § 2].

1. Кривизна линии на 2-поверхности

Пусть на поверхности задана линия

$$u^\alpha = u^\alpha(t),$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u^1(t), u^2(t)\right).$$

[1]Артеменко Ирина Владимировна, доцент кафедры математики, тел.: 89148816908.
Artemenko Irina, Associate Professor of the chair of Mathematics, tel.: 89148816908.

Находим $\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{u^{\alpha}}{ds}\vec{e}_{\alpha}$ и вектор кривизны

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{du^2}{ds^2}\vec{e}_{\alpha}+\omega^{\alpha}\sum_{i=1}^{6}\omega_{\alpha}^{i}\vec{e}_{i}\right).$$

Разбив $i=\overline{1,6}$ на $\beta=1,2$ и $\eta=\overline{3,6}$ и заменив во втором слагаемом $\beta\leftrightarrow\alpha$, получаем:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{d\omega^2+\omega^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}}{ds^2}\vec{e}_2+\sum_{\eta=3}^{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\omega^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\eta}}{ds^2}\vec{e}_{\eta}.$$

Вектор кривизны разбивается на касательную составляющую

$$\overline{V_g}=\frac{d\omega^{\alpha}+\omega^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}}{ds^2}\vec{e}_{\alpha}, \qquad (6)$$

называемую вектором геодезической кривизны линии на поверхности, и нормальную составляющую

$$\overline{V_N}=\frac{\omega^2\omega_{\alpha}^{\eta}}{ds^2}\vec{e}_{\eta},\ \ \alpha=1,2;\ \ \eta=\overline{3,6}, \qquad (7)$$

называемую вектором нормальной кривизны. Используя обозначения (3), записываем его в виде

$$\overline{V_N}=\frac{II^{\eta}}{ds^2}\vec{e}_{\eta}. \qquad (8)$$

Величина

$$k_g=\left|\overline{V_g}\right|=\sqrt{\sum_{\alpha}\left(d\omega^{\alpha}+\omega^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}\right)^2}:ds^2 \qquad (9)$$

называется геодезической кривизной линии на поверхности, а

$$k_N=\left|\overline{V_N}\right|=\sqrt{\sum_{\eta}\left(II^{\eta}\right)^2}:ds^2 \qquad (10)$$

– нормальной её кривизной. В силу ортогональности $\vec{V}_g$ и $\vec{V}_N$ кривизна *K* линии на поверхности определяется формулой

$$K=\sqrt{k_g{}^2+k_N{}^2}.$$

Если рассмотреть сечение поверхности гиперплоскостью $\left\{\overline{M},dr,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right\}$, то имеется вектор кривизны только с составляющей $\overline{V_N}$, поэтому соотношения (7) или (8), (10) определяют кривизну нормального сечения.

2. Соприкасающаяся плоскость 2-поверхности

Плоскость, определяемую точкой *M* и векторами $d\bar{r}$, $d^2\bar{r}$, вычисляемыми для любого направления $\omega^1:\omega^2$ в данной точке поверхности, назовём соприкасающейся плоскостью и обозначим T^2M. Направляющее подпространство соприкасающейся плоскости VT^2M определится векторами $\vec{e}_{\alpha},b_{\beta\gamma}^{\eta}\vec{e}_{\eta},\ \beta\le\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2$. Размерность $dim\,T^2M=rang\left\|\vec{e}_{\alpha},b_{\beta\gamma}^{\eta}\vec{e}_{\eta}\right\|=5$ в силу отсутствия каких-либо условий на $b_{\beta\gamma}^{\eta}$. Ортогональное дополнение назовём бинормальным направлением. Оно определяется системой

$$x^{\alpha}=0;\qquad \sum_{\eta=3}^{6}x^{\eta}\ \ b_{\alpha\beta}^{\eta}=0 \qquad (11)$$

и является одномерным. Прямую $\left\{\overline{M},\overline{X}\right\}$, где $\overline{X}$ – бинормальное направление, назовём бинормалью.

3. Линии кривизны двумерной поверхности

Направления в точке поверхности, определяющие экстремальные значения кривизны нормальных сечений, а также эти кривизны, называются главными. Огибающие главных направлений называются линиями кривизны.

Запишем соотношения (10) в виде

$$\sqrt{\sum_{\eta=3}^{6}\left(II^{\eta}\right)^2-K\left(\omega'^2+\omega^{2^2}\right)}=0.$$

Дифференцируя по ω^{α}, получаем систему:

$$\sum_{\eta=3}^{6}II^{\eta}b_{\alpha\beta}^{\eta}\omega^{\beta}-\sqrt{\sum_{\eta}\left(II^{\eta}\right)^2}K\omega^{\alpha}=0. \qquad (12)$$

4. Кривизна сечения поверхности по данной нормали

Прямая $\{M,\vec{m}\}$ направления $\vec{m}=m^{\eta}\vec{e}_{\eta};\ \eta=\overline{3,6};\ \ \left|\overline{m}\right|=1$ называется частной нормалью. Величина

$$k_{\vec{m}}=\left(\vec{V}_N,\vec{m}\right)=np\vec{V}_N\Big|_{\vec{m}}^{\perp}=k_N\cos\varphi, \qquad (13)$$

где φ – угол между вектором нормальной кривизны и данной частной нормалью, называется кривизной по этой нормали.

Итак, имеем

$$k_{\vec{m}}=\frac{\sum_{\eta=3}^{6}m^{\eta}II^{\eta}}{ds^2} \qquad (14)$$

и назовём

$$II_{\vec{m}}=\sum_{\eta=3}^{6}m^{\eta}II^{\eta} \qquad (15)$$

второй квадратичной формой поверхности по частной нормали $\vec{m}$.

Теорема. Кривизна линии по бинормали тождественно равна нулю.

Доказательство вытекает из того, что для решения системы (11) $II_{\vec{m}}=0$.

5. Главные и средние кривизны поверхности по данной нормали

Соотношения (14), опустив индекс $''\overline{m}''$, запишем в виде:

$$\sum_{\eta=3}m^{\eta}b_{\alpha\beta}^{\eta}\omega^{\alpha}\omega^{\beta}-k\sum_{\alpha=1}^{\eta}\left(\omega^{\alpha}\right)^2=0.$$

Дифференцируя по ω^{α}, получаем линейную систему:

$$\sum_{\eta=3}^{6} m^\eta b^\eta_{\alpha\beta}\omega^\beta - k\omega^\alpha = 0. \qquad (16)$$

Так как квадратичная форма II_m симметрична, ds^2 – определенная форма, то характеристическое уравнение

$$det\left|\sum_{\eta=3}^{6} m^\eta b^\eta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}k\right| = 0, \;\; \alpha,\beta = 1,2 \qquad (17)$$

($\delta_{\alpha\beta}$ – кронекеров символ). Получаем уравнение

$$K^2 - \sum_{\eta=3}^{6} m^\eta\left(b^\eta_{11} + b^\eta_{22}\right)K + $$
$$+\begin{vmatrix} \sum_\eta m^\eta b^\eta_{11} & \sum_\eta m^\eta b^\eta_{12} \\ \sum_\eta m^\eta b^\eta_{12} & \sum_\eta m^\eta b^\eta_{22}\end{vmatrix} = 0.$$

Величины

$$J_1 = k_1 + k_2 = \sum_\eta m^\eta\left(b^\eta_{11} + b^\eta_{22}\right), \qquad (18)$$

$$J_2 = k_1 \cdot k_2 = \begin{vmatrix} \sum_\eta m^\eta b^\eta_{11} & \sum_\eta m^\eta b^\eta_{12} \\ \sum_\eta m^\eta b^\eta_{12} & \sum_\eta m^\eta b^\eta_{22}\end{vmatrix} \qquad (19)$$

называются средней и полной кривизнами поверхности по частной нормали $\overline{m}$. Корни k_1, k_2 называются главными кривизнами по частной нормали.

6. Индикатрисы кривизн

Средняя кривизна J_1 является линейной функцией координат частной нормали $\vec{m} = m^\eta \vec{e}_\eta$, поэтому и график этих кривизн будет линейным.

Введём радиус средней кривизны по нормали $\overline{m}$:

$$\rho = 1 : J_1; \;\; x^\eta = \rho m^\eta; \;\; \eta = \overline{3,6}.$$

Так как $\left|\vec{m}\right| = 1$, то $\left|\vec{x}\right| = \rho$. Из формулы (18) получаем уравнение плоскости в *NM*:

$$\sum_\eta x^\eta\left(b^\eta_{11} + b^\eta_{22}\right) = 1, \qquad (20)$$

называемой индикатрисой средних кривизн по частным нормалям.

Плоскость (20) имеет вектор нормали

$$\vec{p} = \sum_{\alpha=1}^{2} b^\eta_{\alpha\alpha}\vec{e}_\eta; \;\; \eta = \overline{3,6},$$

который называется средней нормалью поверхности в данной точке *M*. Величина

$$p = \left|\vec{p}\right| = \sqrt{\sum_\eta\left(b^\eta_{11} + b^\eta_{22}\right)^2}$$

называется средней кривизной поверхности.

Введём

$$R^2 = 1 : J_2; \;\; x^\eta = m^\eta R,$$

тогда

$$R^2 J_2 = \begin{vmatrix} \sum_\eta x^\eta b^\eta_{11} & \sum_\xi x^\xi b^\xi_{12} \\ \sum_\eta x^\eta b^\eta_{12} & \sum_\xi x^\xi b^\xi_{22}\end{vmatrix} = 1, \;\; \eta,\xi = \overline{3,6}.$$

Поверхность

$$\sum_{\eta\xi} x^\eta x^\xi\left(b^\eta_{11}b^\xi_{22} - b^\eta_{12}b^\xi_{12}\right) = 1 \qquad (21)$$

называется индикатрисой полных кривизн по нормалям $\overline{m} \in NM$.

Теорема. Индикатриса средних кривизн параллельна бинормали.

Теорема. Индикатриса полных кривизн есть цилиндр второго порядка с образующими, параллельными бинормалям.

Доказательства вытекают из свойств системы (11), определяющей бинормаль. Действительно, например, во втором случае бинормаль (11) является линией центров индикатрисы (21).

7. Нормальное оснащение поверхности

Фиксация $b^6_{\alpha\beta} = 0; \;\alpha,\beta = 1,2$ совмещает плоскость $\left\{M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right\}$ репера с соприкасающейся плоскостью, а прямую $\left\{M, \vec{e}_6\right\}$ с бинормалью в данной точке *M*.

Из соотношений (5) при

$$\begin{vmatrix} b^3_{11} & b^4_{11} & b^5_{11} \\ b^3_{12} & b^4_{12} & b^5_{12} \\ b^3_{22} & b^4_{22} & b^5_{22}\end{vmatrix} \neq 0, \qquad (22)$$

означающим, что $dimT^2M = 5$, получаем: $\pi^6_\rho = 0; \;\; \rho = 3,4,5$.

Пересечение индикатрисы полных кривизн с соприкасающейся плоскостью T^2M даёт в последней невырожденную в общем случае квадрику

$$\sum_{\eta,\xi=3}^{5}\left(b^\eta_{11}b^\xi_{22} - b^\eta_{12}b^\xi_{12}\right)x^\eta x^\xi = 1. \qquad (23)$$

Фиксация

$$b^\eta_{11}b^\xi_{22} - b^\eta_{12}b^\xi_{12} = 0, \;\; \eta \neq \xi$$

при $b^\eta_{11}b^\eta_{22} - \left(b^\eta_{12}\right)^2 \neq b^\xi_{11}b^\xi_{22} - \left(b^\xi_{12}\right)^2$ направляет векторы $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ по главным направлениям квадрики (23).

8. Инвариантное касательное оснащение

Любой из фиксированных в предыдущем параграфе векторов $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ нормального оснащения может быть выбран за частную нормаль, порождающую инвариантное касательное оснащение 2-поверхности в E_6.

Возьмём за частную нормаль $\vec{e}_3$ и получим в условиях (22) кривизну нормального сечения по этой нормали

$$K = \frac{II\vec{e}_3}{ds^2},$$

или

$$b^3_{11}\omega^{1^2} + 2b^3_{12}\omega^1\omega^2 + b^3_{22}\omega^{2^2} - k\left(\omega^{1^2} + \omega^{2^2}\right) = 0 .$$

Дифференцируя по ω^1, ω^2, получаем линейную систему:

$$b^3_{11}\omega^1 + b^3_{12}\omega^2 - k\omega^1 = 0;$$

$$b^3_{21}\omega^1 + b^3_{22}\omega^2 - k\omega^2 = 0,$$

определяющую уравнение

$$\begin{vmatrix} b^3_{11} - k & b^3_{12} \\ b^3_{21} & b^3_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

главных кривизн по нормали $\vec{e}_3$ и уравнение

$$b^3_{21}\omega^{1^2} + \left(b^3_{22} - b^3_{11}\right)\omega^1\omega^2 - b^3_{12}\omega^{2^2} = 0$$

линий кривизны.

Фиксация

$$b^3_{12} = 0,\ \left(b^3_{11} - b^3_{22}\right) \neq 0$$

совмещает направления $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ с касательными к линиям кривизны по нормали $\vec{e}_3$ при условии, что точка *M* не является омбилической по этой нормали. Построение инвариантного оснащения 2-поверхности в E_3 закончено.

Библиографический список

Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973.

УДК 504.455.064.36:574(282.256.341)

ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ В СФЕРЕ ВОДОПОЛЬЗОВАНИЯ БАЙКАЛЬСКОГО РЕГИОНА

Е.В. Верхозина[1], В.А. Верхозина[2], Л.Е. Протасова
[1]Институт Земной коры СО РАН,
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 128.
[2]Институт геохимии им. А.П. Виноградова СО РАН,
664033,г. Иркутск, ул. Фаворского, 1 А.
[2]Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

Антропогенное вмешательство в геоэкосистемы крупнейших поверхностных водоемов связано с возможностью необратимых последствий для ныне живущих и будущих поколений, что находится в противоречии с устойчивым экономическим развитием. На сегодняшний день качество водных объектов катастрофически ухудшается. Стоимость пресной питьевой воды со временем будет все возрастать. Современные проблемы в сфере рационального природопользования рассматриваемых озер состоят в пополнении информации о механизме и функционировании их геоэкосистем. Выявленные факторы должны влиять на формирование эффективной политики управления ресурсами озера Байкал.
Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: антропогенное влияние; геоэкосистемы; проблемы рационального природопользования; эффективная политика управления ресурсами; проблемы пресной воды; экономический рост.

ENVIRONMENTAL PROBLEMS IN THE FIELD OF WATER MANAGEMENT IN BAIKAL REGION

E.V. Verhozina, V.A. Verhozina, L.E. Protasova
Institute of Earth Crust SB RAS,
128, Lermontov St., Irkutsk, 664033.
Institute of Geochemistry named after A.P. Vinogradov SB RAS,
1a, Favorsky St., Irkutsk, 664033.
National Research Irkutsk State Technical University,
83, Lermontov St., Irkutsk, 664074.

Anthropogenic interference into the geoecosystems of the largest surface water reservoirs is connected with the possibility of irreversible effects for the living and future generations. The last is in conflict with sustainable economic develop-

[1]Верхозина Елена Владимировна, кандидат биологических наук, научный сотрудник лаборатории литогенеза и стратиграфии, тел.: (3952) 427000, (3952) 426102, 89148805774, e-mail: verhel@crust.irk.ru
Verhozina Elena, Candidate of Biology, Research Worker of the Laboratory of Lithogenesis and Stratigraphy, tel.: (3952) 427000, (3952) 426102, 89148805774, e-mail: verhel@crust.irk.ru
[2]Верхозина Валентина Александровна, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории физико-химического моделирования, тел.: (3952) 510854, 89149047775, e-mail: verhval@igc.irk.ru
Verhozina Valentina, Doctor of technical sciences, Professor, Leading Researcher of the Laboratory of Physicochemical Modeling, tel.: (3952) 510854, 89149047775, e-mail: verhval@igc.irk.ru